n° enregistrement
au CNRS

UNIVERSITE DE PARIS-SUD - CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE 3ÈME CYCLE

ANALYSE NUMERIQUE ET OPTIMISATION

par

MAMADOU-LAMINE SIDIBE

sujet

RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME UNILATÉRAL PAR ÉQUATIONS INTÉGRALES ET ÉLÉMENTS FINIS

soutenue le 19 mars 1981

devant la Commission d'examen composée de :

M. R. TEMAM, Président
M. A. BAMBERGER, Examinateur
M. J.C. NEDELEC, Examinateur
M. L. TARTAR, Examinateur

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547326_0017

n° enregistrement
au CNRS

UNIVERSITE DE PARIS-SUD - CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE 3ÈME CYCLE

ANALYSE NUMERIQUE ET OPTIMISATION

par

MAMADOU-LAMINE SIDIBE

sujet

RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME UNILATÉRAL PAR ÉQUATIONS INTÉGRALES ET ÉLÉMENTS FINIS

soutenue le 19 mars 1981

devant la Commission d'examen composée de :

M. R. TEMAM, *Président*
M. A. BAMBERGER, *Examinateur*
M. J.C. NEDELEC, *Examinateur*
M. L. TARTAR, *Examinateur*

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Monsieur R. TEMAM m'a initié à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles et me fait l'honneur de présider le jury : je lui exprime toute ma gratitude.

Je suis très profondément reconnaissant à Monsieur J.C. NEDELEC qui m'a accueilli au Centre de Mathématiques Appliquées de l'Ecole Polytechnique, m'a donné le sujet de travail et m'a guidé de ses conseils pour le mener à bien.

Je remercie vivement Monsieur A. BAMBERGER pour tous ses conseils et pour avoir accepté de faire partie du jury.

Je remercie Monsieur L. TARTAR pour l'intérêt qu'il témoigne à mon travail en acceptant de participer au jury.

A ces remerciements, j'associe toute l'équipe du Centre de Mathématiques Appliquées pour leur aide et sympathie.

Last but not least, C. MOURADIAN et G. BOLEAT ont assuré la dactylographie du manuscrit et ont réussi à le rendre présentable. Je leur en suis très reconnaissant.

Je remercie enfin le personnel de l'Imprimerie de l'Ecole Polytechnique qui a assuré le tirage.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

I - ETUDE DU PROBLEME CONTINU

1 - Formulation variationnelle du problème

2 - Réduction du convexe des contraintes
Existence et unicité de la solution

3 - Formulation en un problème variationnel sur $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$

4 - Régularité : Pénalisation du problème.
Un résultat de régularité

II - ETUDE DU PROBLEME APPROCHE

1 - Approximation de la surface Γ

2 - Définition du problème approché :
(P_h^1) : problème approché sur Γ_h
(P_h^2) : aproximation de (P_h^1) par des éléments finis de Lagrange

3 - Calcul des coefficients de la matrice de (P_h^2) et définition du problème approché final :
Résolution des problèmes de Dirichlet dans Ω_h et calcul des coefficients
Définition de (P_h^3)

4 - Convergence de la méthode

APPENDICE 1 : Calcul de $V_h^\ell(F)$

APPENDICE 2 : Calcul de $\frac{\partial V_h^\ell}{\partial n_h}(P)\Big|_{\Gamma_h}$ int

APPENDICE 3 : Calcul de $W_{hi}^k(P)$

III - MISE EN OEUVRE ET RESULTATS NUMERIQUES

1 - Généralités sur la méthode

2 - Exemples quand Ω est une sphère

3 - Exemples quand Ω est un ellipsoïde

CONCLUSION

LISTE DES PROGRAMMES

BIBLIOGRAPHIE

INTRODUCTION

Nous nous intéressons à la résolution d'un problème non linéaire, intervenant dans des domaines divers, par exemple en élasticité et en thermique.

La non-linéarité du problème est due à la nature des conditions au bord, qui sont des conditions de Signorini. Brièvement, cela se présente de la manière suivante :

En thermique (nous nous réferons à [10]), considérons une enceinte qui occupe un ouvert $\Omega \subset \mathbf{R}^3$, de frontière Γ régulière, de normale extérieure $\vec{n}$. Γ est une mebrane semi-perméable, c'est-à-dire qu'elle laisse seulement entrer la chaleur ; la température à l'intérieur de Ω satisfait à l'équation de diffusion $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f$ dans Ω, f représentant une densité volumique d'apport de chaleur. Nous supposons que la position d'équilibre thermique global est atteinte, donc u ne dépend plus de t ; si, à l'extérieur de Ω sur Γ, la température est $u_0(x)$, nous avons les conditions à la frontière :

$$(0.1)\quad \begin{cases} \cdot\ u_0(x) < u(x),\ x \in \Gamma\ ; \text{ alors } \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ car la chaleur a tendance à sortir, mais } \Gamma \text{ l'en empêche ;} \\ \cdot\ u_0(x) = u(x),\ x \in \Gamma\ ; \text{ alors } \frac{\partial u}{\partial n} \geqslant 0 \text{ car la chaleur a tendance à entrer dans } \Omega\text{, ce que } \Gamma \text{ permet} \end{cases}$$

($\frac{\partial u}{\partial n}$ étant le flux de chaleur à travers Γ).

Cependant, les parties de Γ où l'on a l'une ou l'autre de ces conditions réalisées est une inconnue du problème, d'où le nom de problème unilatéral.

En élasticité (Cf. [15], pour les équations), supposons que Ω est borné et correspond à la région occupée dans l'état initial sans contrainte par un corps élastique ; on suppose que le corps repose sur un support rigide s sans frottement et est soumis à des forces de volume et de surface (sur la partie de la surface non en contact avec s). Le problème d'équilibre de ce corps est le problème de Signorini, la contrainte unilatérale se traduit sur s par

des relations du type (0.1) ce qui exprime le fait que Ω reste au dessus de s

L'analyse numérique de ce genre de problème, quand $\Omega \subset \mathbf{R}^2$, a été faite par divers auteurs, par exemple [18], [21], [31].

Quand $\Omega \subset \mathbf{R}^3$, comme nous le considérons ici, une méthode naturelle serait l'emploi d'éléments finis tridimensionnels ; l'utilisation des équations intégrales nous permet l'alternative suivante, dont la mise en oeuvre est plus simple :

Dans une première partie, nous étudions le problème continu : existence, unicité et régularité de la solution ; nous définissons un problème variationnel équivalent (au sens faible) $(\mathcal{P})$ sur $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Dans une seconde partie, nous définissons une surface approchée Γ_h, puis, successivement, $(\mathcal{P}_h^1)$, problème approché dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_h)$, et $(\mathcal{P}_h^2)$, problème approché dans un sous-espace vectoriel de dimension finie de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_h)$. La méthode de résolution approchée du problème de Dirichlet dans un ouvert borné de $\mathbf{R}^3$, comme équation intégrale introduite par [30], [29], nous permet finalement de poser le problème $(\mathcal{P}_h^3)$ qui sera le problème résolu. Nous terminons cette partie en établissant la convergence de la méthode.

Dans la troisième et dernière partie, consacrée à la résolution numérique, nous présentons les méthodes et schémas de calcul et nous donnons plusieurs exemples numériques avec des géométries différentes, la sphère et l'ellipsoïde.

CADRE FONCTIONNEL ET NOTATIONS

Ω est un ouvert borné de $\mathbf{R}^3$, de frontière Γ régulière. On note $\overline{\Omega}^c$ le complémentaire de $\overline{\Omega}$.

$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \; ; \; \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \; 1 \leqslant i \leqslant 3 \right\}$ est l'espace de Sobolev d'ordre 1, muni du produit scalaire et de la norme habituels : si $(\, , \,)_{L^2(\Omega)}$ est le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$,

$$\forall \, u \, , \, \forall \, v \in H^1(\Omega), \; (u,v)_{H^1(\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} , \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{L^2(\Omega)}$$

et

$$\| u \|^2_{H^1(\Omega)} = (u,u)_{H^1(\Omega)} \, .$$

D'une manière générale, $H^s(\Omega)$, s réel positif, et $H^s(\Gamma)$, s réel quelconque, désigneront les espaces de Sobolev d'ordre s, muni de leur structure habituelle d'espace de Hilbert (Cf. J.L. LIONS et E. MAGENES [24]).

γ_0 et γ_1 étant les applications traces habituelles, soit

$$\mathcal{H}^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) \; ; \; \Delta u \in L^2(\Omega) \right\} \quad \text{où} \quad \Delta \quad \text{est le Laplacien.}$$

D'après [24],

$$\mathcal{H}^1(\Omega) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad \text{est continue ;}$$

$$u \rightarrow (\gamma_0 u \, , \gamma_1 u) \, .$$

Si $r = |x|$ est la distance du point $x \in \mathbf{R}^3$ à l'origine, on définit l'espace de Sobolev avec poids

$$W^1_0(\overline{\Omega}^c) = \left\{ u \; ; \; \frac{u}{\sqrt{1+r^2}} \in L^2(\overline{\Omega}^c) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\overline{\Omega}^c), \; 1 \leqslant i \leqslant 3 \right\}$$

qui est un Hilbert.

Enfin, si V est un espace de Banach, V' désignera son dual.

CHAPITRE I

ÉTUDE DU PROBLÈME CONTINU

Dans toute la suite, nous supposerons que Ω est simplement connexe. Le problème à résoudre est le suivant :

$$(1.1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \text{déterminer } u \text{ définie dans } \Omega \text{ à valeurs réelles telle que} \\ -\Delta u = 0 \quad \text{dans } \Omega \ ; \\ u - u_0 \geqslant 0 \ ; \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} - g \geqslant 0 \ ; \\ (u-u_0)\left(\dfrac{\partial u}{\partial n} - g\right) = 0 \ , \end{array}\right\} \text{sur } \Gamma$$

où Δ est l'opérateur de Laplace dans $\mathbf{R}^3$, $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ est la dérivée de u suivant la normale n, et u_0, g, des fonctions définies sur Γ données. Nous supposons, par la suite, que u_0 et g sont au moins dans $L^2(\Gamma)$.

La troisième condition sur Γ de (1.1) traduit le fait qu'en tout point de Γ, $u-u_0$ ou $\dfrac{\partial u}{\partial n} - g$ s'annule. Cependant, les parties de Γ où $u = u_0$ ou bien $\dfrac{\partial u}{\partial n} = g$, sont des inconnues de ce problème. Cette troisième condition $(u-u_0)\left(\dfrac{\partial u}{\partial n} - g\right) = 0$ a un sens, car $\dfrac{\partial u}{\partial n} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, puisque $-\Delta u \in L^2(\Omega)$ (voir le paragraphe précédent).

I-1 - FORMULATION VARIATIONNELLE DU PROBLEME (1.1).

Soit

$$a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbf{R}$$

$$(1.2)\qquad u \ , \ v \ \to a(u,v) = \int_\Omega \nabla u . \nabla v \, d\omega \ ,$$

a est une forme bilinéaire, continue et symétrique. Définissons ensuite

$$(1.3)\qquad K = \left\{ v \ ; \ v \in H^1(\Omega) \ ; \ v|_\Gamma \geqslant u_0 \right\} \ ,$$

ensemble convexe et fermé de $H^1(\Omega)$.

Nous avons la proposition suivante :

PROPOSITION 1.1 : Toute solution u *de (1.1) est caractérisée par*

(1.4) $\quad u \in K\ ,\ a(u,v-u) \geqslant (g,v-u)_{L^2(\Gamma)}\ ,\ \forall\ v \in K\ ,$

où

$$(g,v-u)_{L^2(\Gamma)} = \int_\Gamma g(x)\ \gamma_0(v-u)(x)\ d\Gamma_x\ .$$

Démonstration : On suppose que la solution u de (1.1) est dans $H^1(\Omega)$.

Puisque

$$-\int_\Omega \Delta u.v = 0\ ,\ \forall\ v \in H^1(\Omega),$$

la formule de Green donne alors

(1.5) $$\int_\Omega \nabla u.\nabla v\ d\omega = \int_\Gamma v\ \frac{\partial u}{\partial n}\ d\Gamma\ ,\ \forall\ v \in H^1(\Omega).$$

En particulier,

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla(v-u) = \int_\Gamma (v-u)\frac{\partial u}{\partial n}\ d\Gamma = \int_\Gamma (v-u_0)(\frac{\partial u}{\partial n} - g) + \int_\Gamma (u_0-u)(\frac{\partial u}{\partial n} - g) + \int_\Gamma (v-u)g\ .$$

Si $v \in K$, alors $v_{|\Gamma} - u_0 \geqslant 0$, et comme $(u_0-u)(\frac{\partial u}{\partial n} - g) = 0$ sur Γ, par conséquent

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla(v-u)\ d\omega \geqslant \int_\Gamma (v-u)\ g\ d\Gamma\ ,\ \forall\ v \in K\ .$$

Inversement, soit u solution de (1.4),

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla(v-u) \geqslant \int_\Gamma (v-u)\ g\ d\Gamma\ ,\quad \forall\ v \in K\ .$$

De nouveau, la formule de Green donne

(1.6) $$-\int_\Omega \Delta u.(v-u) + \int_\Gamma (v-u)(\frac{\partial u}{\partial n} - g) \geqslant 0\ ,\ \forall\ v \in K\ .$$

En particulier, avec $v = u+\varphi \in K$, où $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ quelconque, (1.6) devient

$$-\int_\Omega \Delta u.\varphi \geqslant 0\ ,\ \forall\ \varphi \in \mathscr{D}(\Omega),$$

c'est-à-dire que

(1.7) $\quad -\Delta u = 0 \quad \text{dans} \quad \mathscr{D}'(\Omega),$

ce qui avec (1.6) se résume à

(1.7)' $$\begin{cases} u \in K \ , \ -\Delta u = 0 \quad \text{dans} \quad \mathscr{D}'(\Omega) \\ \int_\Gamma (v-u)(\frac{\partial u}{\partial n} - g)\, d\Gamma \geqslant 0 \ , \ \forall\, v \in K \ . \end{cases}$$

a) soit $\psi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, telle que $\psi \geqslant 0$ p.p. sur Γ , et soit $v \in H^1(\Omega)$ telle que $v|_\Gamma = u|_\Gamma + \psi$; puisque $v \in K$, alors

$$\int_\Gamma \psi(\frac{\partial u}{\partial n} - g)\, d\Gamma \geqslant 0 \ , \ \forall\, \psi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \ \psi \geqslant 0 \quad \text{p.p.} \ ;$$

par conséquent

$$\frac{\partial u}{\partial n} - g \geqslant 0 \quad \text{p.p. sur} \quad \Gamma \ .$$

b) en faisant successivement $v = u_0$ et $v = 2u-u_0$ dans (1.7)', on déduit

(1.8) $$\int_\Gamma (u-u_0)(\frac{\partial u}{\partial n} - g)\, d\Gamma = 0 \ .$$

Sachant que $u-u_0 \geqslant 0$ et $\frac{\partial u}{\partial n} - g \geqslant 0$ sur Γ , alors on a

(1.8)' $\quad (u-u_0)(\frac{\partial u}{\partial n} - g) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \ . \quad \blacksquare$

Soit

$$J : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$

(1.9) $$v \quad \to J(v) = \frac{1}{2}\, a(v,v) - \int_\Gamma v\, g\, d\Gamma \ .$$

La G-différentielle de J est définie par

(1.10) $$< J'(u), v >_{H^1, H^{1\prime}} = \int_\Omega \nabla u . \nabla v - \int_\Gamma v\, g \ .$$

Par conséquent, une solution u de (1.4) est solution du problème variationnel :

$$(1.11) \qquad u \in K \ , \ J(u) = \operatorname{Min}_{v \in K} J(v) \ ,$$

et réciproquement. Ceci est un résultat classique bien connu [11].

Puisqu'il en est de même de toute solution u de (1.1) et (1.4), on déduit que si u vérifie (1.11), alors $\Delta u = 0$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$ (entre autres). Ceci nous permettra de restreindre le convexe K dans (1.11).

I.2 - REDUCTION DU CONVEXE DES CONTRAINTES. EXISTENCE ET UNICITE DE LA SOLUTION

Soit

$$\text{(1.12)} \qquad \widetilde{K} = \left\{ v \in H^1(\Omega) \ ; \ \Delta v = 0 \ \text{ dans } \ \Omega \ \text{ et } \ v|_\Gamma \geqslant u_0 \right\} ,$$

un convexe inclu dans K . On considère le problème

$$\text{(1.13)} \qquad \begin{cases} \text{trouver } \ \widetilde{u} \in \widetilde{K} \ \text{ tel que} \\ J(\widetilde{u}) = \underset{v \in \widetilde{K}}{\text{Min}} \ J(v) \ . \end{cases}$$

PROPOSITION 1.2 : Si elle existe, toute solution de (1.11) est solution de (1.13).

Démonstration : Si u est une solution de (1.11), alors $\Delta u = 0$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$, donc $u \in \widetilde{K}$, par conséquent

$$J(\widetilde{u}) \leqslant J(u) \ ,$$

où $\widetilde{u}$ est une solution de (1.13). D'autre part,

$$J(u) = \underset{v \in K}{\text{Min}} \ J(v) \leqslant \underset{v \in \widetilde{K}}{\text{Min}} \ J(v) = J(\widetilde{u}) \ ,$$

et, par conséquent,

$$J(u) = J(\widetilde{u}) \ ,$$

c.à.d. que u est aussi une solution de (1.13). ∎

J étant continue sur $H^1(\Omega)$, on a le

THEOREME 1.1 : Si

$$\begin{cases} J(v) \to + \infty \\ \| v \|_{H^1(\Omega)} \to + \infty \\ v \in K \ \text{(resp. } v \in \widetilde{K}) \end{cases}$$

alors, le problème (1.11) (resp. (1.13)) a au moins une solution.

Ceci est un résultat classique d'analyse convexe (Cf., par exemple, LIONS [24], EKELAND-TEMAM [11]).

REMARQUE 1.1 : Puisque $\tilde{K} \subset K$, alors si

$$J(v) \to +\infty \quad \text{quand} \quad \|v\|_{H^1(\Omega)} \to +\infty \ , \ v \in K \ ,$$

on a

$$J(v) \to +\infty \quad \text{quand} \quad \|v\|_{H^1(\Omega)} \to +\infty \ , \ v \in \tilde{K} \ .$$

THEOREME 1.2 : Une condition nécessaire et suffisante pour que (1.11) ait une solution et une seule est que

$$\int_\Gamma g(x)\, d\Gamma_x < 0 \ .$$

De la Remarque 1.1, il résulte qu'il en sera de même pour (1.13).

COROLLAIRE : Si

$$\int_\Gamma g(x)\, d\Gamma_x < 0 \ ,$$

(1.11) et (1.13) ont une seule et même solution.

Démonstration du Théorème 1.2 :

. Unicité : l'unicité de la solution de (1.11) serait immédiate si J était strictement convexe ; or

$$v,w \quad H^1(\Omega), \text{ quelconque, } 0 < \lambda < 1 \ ,$$

$$J(\lambda v+(1-\lambda)w) - \lambda J(v)-(1-\lambda)J(w)) = -\frac{\lambda(1-\lambda)}{2} \int_\Omega |\nabla(v-w)|^2 \, d\omega \ ,$$

ce qui s'annule si $v-w$ = constante. Soient u_1 , u_2 , deux solutions de (1.11) ; alors elles vérifient (1.4), donc

$$\int_\Omega \nabla u_1 . \nabla(v-u_1) \, d\omega - \int_\Gamma (v-u_1)\, g \, d\Gamma \geqslant 0 \ , \ \forall \ v \in K \ ,$$

$$\int_\Omega \nabla u_2 . \nabla(v-u_2) \, d\omega - \int_\Gamma (v-u_2)\, g \, d\Gamma \geqslant 0 \ , \ \forall \ v \in K \ .$$

En prendant $v = u_2$ et $v = u_1$ successivement, et en additionnant, on a

$$-\int_\Omega |\nabla(u_2-u_1)|^2 \, d\omega \geqslant 0 ,$$

donc

(1.15) $\quad u_2 - u_1 = c = \text{constante.}$

Par ailleurs, l'inéquation (1.4), vérifiée pour toute solution u de (1.1) se transforme (puisque $\Delta u = 0$) en

$$\int_\Gamma (v-u)(\frac{\partial u}{\partial n} - g) \, d\Gamma \geqslant 0 , \forall\, v \in H^1(\Omega) ,$$

grâce à la formule de Green. Prenant alors $u = u_1$, $v = u_2 = u_1 + c$, on obtient

$$c \int_\Gamma (\frac{\partial u_1}{\partial n} - g) \, d\Gamma \geqslant 0 ,$$

ce qui équivaut à

$$-c \int_\Gamma g \, d\Gamma \geqslant 0 , \quad \text{car} \quad \int_\Gamma \frac{\partial u_1}{\partial n} \, d\Gamma = 0 .$$

En prenant $u = u_2$, $v = u_1 = u_2 - c$, la même inégalité donne

$$-c \int_\Gamma (\frac{\partial u_2}{\partial n} - g) \, d\Gamma \geqslant 0 ,$$

ce qui équivaut à

$$c \int_\Gamma g \, d\Gamma \geqslant 0 , \quad \text{car} \quad \int_\Gamma \frac{\partial u_2}{\partial n} \, d\Gamma = 0 .$$

En conclusion

(1.16) $\quad c \int_\Gamma g \, d\Gamma = 0 ,$

ce qui implique que $c = 0$, i.e. $u_1 = u_2$, car $\int_\Gamma g \, d\Gamma < 0$.

Existence : nous avons le théorème suivant, dont on peut trouver une démonstration dans J. NEČAS [28] (premier chapitre) :

THEOREME 1.3 (Inégalité de Friedrichs) : Soit Ω un ouvert borné à frontière lipschitzienne de $\mathbf{R}^n$. Soit $\Gamma_0 \subset \Gamma$ tel que $\mu(\Gamma_0) \neq 0$ (μ désigne la mesure de Lebesgue sur Γ). Pour tout $u \in H^1(\Omega)$,

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \text{const} \left(\int_{\Gamma_0} |u|^2 \, d\Gamma + \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

Un cas particulier de ce théorème est le lemme suivant dont nous donnons une démonstration et qui suffira pour établir l'existence de la solution :

LEMME 1.1 : *Il existe deux constantes* β_1 , β_2 , *positives telles que,* $\forall\, v \in H^1(\Omega)$,

$$\beta_1 \|v\|^2_{H^1(\Omega)} \leq \int_\Gamma |v|^2 \, d\Gamma + \int_\Omega |\nabla v|^2 \, d\omega \; ; \tag{1.17}$$

$$\beta_2 \|v\|^2_{H^1(\Omega)} \leq \left(\int_\Gamma v \, d\Gamma \right)^2 + \int_\Omega |\nabla v|^2 \, d\omega \; ; \tag{1.18}$$

Démonstration du Lemme 1.1 : On démontre l'inégalité (1.18), la démonstration de (1.17) étant similaire. On procèdera en trois étapes : soit

$$|||\, v \,||| = \left[\int_\Omega |\nabla v|^2 + \left(\int_\Gamma v \, d\Gamma \right)^2 \right] ; \tag{1.19}$$

i) $|||\, . \,|||$ est une norme sur $H^1(\Omega)$; ceci se vérifie rapidement.

ii) $H^1(\Omega)$ muni de la norme $|||\, . \,|||$ est un espace de Banach. La démonstration de cette étape est assez longue, et nous la donnons après celle de l'étape (iii).

iii) Soit $Id : H^1(\Omega), |||\, . \,||| \to H^1(\Omega), \|\, . \,\|$ l'identité

$$v \qquad \to \qquad v$$

La topologie définie par $\|\, . \,\|$ est plus fine que celle définie par $|||\, . \,|||$ donc le graphe de Id est fermé. Puisque $H^1(\Omega), |||\, . \,|||$ et $H^1(\Omega), \|\, . \,\|$ sont des espaces de Banach, alors le théorème du graphe fermé (Cf. K. YOSIDA [34] ou L. SCHWARTZ [32]) implique qu'il existe une constante c telle que $\|v\| \leq c\, |||\, v \,|||$ (i.e. Id est continue), ce qui prouve l'inégalité (1.18).

preuve de (ii) : On est amené à définir l'espace quotient $H^1(\Omega)/_{\mathbb{R}}$ des classes $\tilde{u}$ des fonctions de $H^1(\Omega)$: $u, v \in \tilde{u} \iff u - v \in \mathbb{R}$. $H^1(\Omega)/_{\mathbb{R}}$, muni de la norme $\|\tilde{u}\|_{H^1/\mathbb{R}} = \inf_{u \in \tilde{u}} \|u\|_{H^1(\Omega)}$ est un espace de Banach.

Puisque

$$\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, d\omega\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \ , \ \forall\, u \in H^1(\Omega)$$

et que

$$u,v \in \tilde{u} \iff u-v = \text{constante} \Rightarrow \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, d\omega\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 \, d\omega\right)^{\frac{1}{2}}$$

alors

$$\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, d\omega\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|\tilde{u}\|_{H^1(\Omega)/\mathbf{R}} .$$

De plus, on a le résultat classique :

THEOREME 1.4 : Soit Ω un ouvert borné à frontière continue. Pour $u \in \tilde{u}$

$$\|\tilde{u}\|_{H^1/\mathbf{R}} \leq \text{const} \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, d\omega\right)^{\frac{1}{2}} ;$$

$H^1(\Omega)/\mathbf{R}$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$u \in \tilde{u}, v \in \tilde{v} \ , \ (\tilde{u},\tilde{v}) = \int \nabla u.\nabla v \, d\omega \ .$$

(Voir J. NEČAS pour une démonstration).

On peut alors prouver que $(H^1(\Omega), |||\ .\ |||)$ est complet. Soit v_m une suite de Cauchy pour cette norme. Alors, $\forall\ i$, $\frac{\partial v_m}{\partial x_i}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ et $\int_\Gamma v_m \, d\Gamma$ a une limite ξ dans $\mathbf{R}$.

Soit $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ la limite dans $L^2(\Omega)$ de $\frac{\partial v_m}{\partial x_i}$; le théorème 1.4 implique qu'il existe des constantes k_m telles que $v_m + k_m$ ait pour limite v dans $H^1(\Omega)$ (donc dans $L^2(\Omega)$), ce qui implique que

$$\int_\Gamma (v_m + k_m) \, d\Gamma \to \int_\Gamma v \, d\Gamma \ .$$

Puisque $\int_\Gamma v_m \, d\Gamma$ a une limite dans $\mathbf{R}$, il en est de même pour $\int_\Gamma k_m \, d\Gamma$, c.à.d. pour k_m. Donc v_m a une limite (encore notée v) dans $H^1(\Omega)$.

Ceci termine la démonstration du Lemme 1.1.

Revenons à l'existence de la solution de (1.11). Pour $v \in H^1(\Omega)$, soit

(1.20) $\quad \overline{v} = \dfrac{1}{\mu(\Gamma)} \int_\Gamma (v-u_0)\, d\Gamma$, μ = mesure de Lebesgue sur Γ .

Si l'on pose $\widetilde{v} = v - \overline{v}$, alors on a

(1.21) $$\int_\Gamma \widetilde{v}\, d\Gamma = \int_\Gamma u_0\, d\Gamma ,$$

ce qui, avec (1.18), donne

(1.22) $$a(\widetilde{v},\widetilde{v}) + \left(\int_\Gamma u_0\, d\Gamma\right)^2 \geqslant \beta_2 \ \|\widetilde{v}\|^2_{H^1(\Omega)} .$$

Or

$$J(v) = \frac{1}{2}\, a(\widetilde{v}+\overline{v},\widetilde{v}+\overline{v}) - \overline{v}(g,1)_{L^2(\Gamma)} - (g,\widetilde{v})_{L^2(\Gamma)}$$

$$= \frac{1}{2}\, a(\widetilde{v},\widetilde{v}) - v(g,1)_{L^2(\Gamma)} - (g,\widetilde{v})_{L^2(\Gamma)} ,$$

et puisque

$$|(g,\widetilde{v})| \leqslant \|g\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}\ \|\widetilde{v}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leqslant \underbrace{c\ \|g\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}}_{\widetilde{c}}\ \|\widetilde{v}\|_{H^1(\Omega)}$$

avec (1.22), on a

(1.23) $$J(v) \geqslant \frac{\beta_2}{2}\ \|\widetilde{v}\|^2_{H^1(\Omega)} - \frac{1}{2}\left(\int_\Gamma u_0\, d\Gamma\right)^2 - \overline{v}(g,1) - \widetilde{c}\ \|\widetilde{v}\|_{H^1(\Omega)} .$$

D'autre part

$$\|v\| \leqslant c''\ |||\ v\ ||| = c''\left[\int_\Omega |\nabla(\widetilde{v}+\overline{v})|^2\, d\omega + \left(\overline{v}\ \mu(\Gamma) + \int_\Gamma \widetilde{v}\, d\Gamma\right)^2\ \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= c''\left[\int_\Omega |\nabla\widetilde{v}|^2\, d\omega + \left(\int_\Gamma \widetilde{v}\, d\Gamma\right)^2 + 2\overline{v}\ \mu(\Gamma)\int_\Gamma \widetilde{v}\, d\Gamma + (\overline{v}\ \mu(\Gamma))^2\right]$$

$$= c''\left[\int_\Omega |||\widetilde{v}\ |||^2 + 2\overline{v}\ \mu(\Gamma)\ \int_\Gamma u_0\, d\Gamma + (\overline{v}\ \mu(\Gamma))^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

par conséquent, si $\|v\| \to +\infty$, alors $|||\ \widetilde{v}\ ||| \to +\infty$, ce qui implique, avec (1.18) que $\|\widetilde{v}\| \to +\infty$, ou bien $\overline{v} \to +\infty$ étant donné que $\mu(\Gamma) < +\infty$ ($\overline{v} \geqslant 0$, si $v \in K$). En imposant que

$$\int_\Gamma g(x)\, d\Gamma_x = (g,1)_{L^2(\Gamma)} < 0 ,$$

on est certain que $J(v) \to +\infty$, $\|v\| \to +\infty$.

Le Théorème 1.1 assure donc que (1.11) a une solution, et celle-ci est unique sous la même condition $(g,1)_{L^2(\Gamma)} < 0$. La nécessité de la condition $(g,1)_{L^2(\Gamma)} < 0$ est plus simple à prouver : si u est solution de (1.11), alors u est solution faible de (1.1). Or $\Delta u = 0$ dans Ω implique par la formule de Green que $\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma = 0$; par conséquent, $\frac{\partial u}{\partial n} - g \geqslant 0$ sur Γ implique que $\int_\Gamma g(x)\, d\Gamma_x \leqslant 0$, ce qui achève la démonstration du théorème 1.2. ∎

REMARQUE 1.2 : Rappelons que l'on peut trouver des théorèmes généraux d'existence de solutions d'inéquations variationnelles dans LIONS-STAMPACCHIA [26], DUVAUT-LIONS [10], ou KINDERLEHRER-STAMPACCHIA [22].

I.3 - FORMULATION EN UN PROBLEME VARIATIONNEL SUR $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Dans les paragraphes précédents, nous avons établi que résoudre (1.1) équivaut à résoudre (sous la condition $(g,1)_{L^2(\Gamma)} < 0$ d'existence et d'unicité)

$$(1.13) \qquad \tilde{u} \in \tilde{K} \ , \ J(\tilde{u}) = \min_{v \in \tilde{K}} J(v) \ ,$$

où $\tilde{K}$ est donné par (1.12) et J par (1.9).

Soit le sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$ défini par

$$\mathcal{H}(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega) \ ; \ \Delta v = 0 \ \text{ dans } \ \Omega \right\} ;$$

$\mathcal{H}(\Omega)$ sera muni de la même structure hilbertienne que $H^1(\Omega)$. On a

$$(1.24) \qquad \tilde{K} = \left\{ v \in \mathcal{H}(\Omega) \ ; \ v|_\Gamma \geqslant u_0 \right\}$$

par conséquent, (1.13) peut être considéré comme posé dans $\mathcal{H}(\Omega)$. On remarquera alors que

$$J : \mathcal{H}(\Omega) \to \mathbb{R}$$

$$(1.25) \qquad v \to J(v) = \frac{1}{2} \int_\Gamma v \frac{\partial v}{\partial n} \, d\Gamma - \int_\Gamma v \, g \, d\Gamma$$

grâce à la formule de Green. En résumé :

REMARQUE 1.3 :

$$(1.13) \Longleftrightarrow (1.13)' \quad \begin{cases} u \in \tilde{K} = \left\{ v \in \mathcal{H}(\Omega) \ ; \ v|_\Gamma \geqslant u_0 \right\} \\ a(u,v-u) \geqslant (v-u,g), \ \forall \ v \in \tilde{K} \ , \end{cases}$$

où

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u . \nabla v \, d\omega = \int_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial n} \, d\Gamma = \int_\Gamma u \frac{\partial v}{\partial n} \, d\Gamma \ .$$

Soit

$\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ l'application trace

$u \to u|_\Gamma$.

γ_0 est linéaire et continue (nous renvoyons à LIONS-MAGENES [25], NEČAS [28], ADAMS [1], etc., pour les propriétés de ces applications). Puisque $\gamma_0 : \mathcal{H}(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est bijective, on a le

LEMME 1.2 : $\gamma_0 : \mathcal{H}(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *est inversible et les deux applications* γ_0 , γ_0^{-1} , *sont linéaires et continues.*

Démonstration : $\mathcal{H}(\Omega), \| . \|_{H^1(\Omega)}$ et $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \| . \|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$ sont des espaces de Hilbert avec les produits scalaires adéquats. Il suffit donc d'utiliser le théorème de l'application ouverte (ou théorème de Banach, cf. K. YOSIDA [34]) pour conclure.

Cet homéomorphisme permet de définir sur $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ un problème équivalent à (1.13) et (1.13)'.

On notera en minuscules les éléments de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Définissons

$$\overline{J} : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \to \mathbb{R}$$

$$u \to \overline{J}(u) = J(\gamma_0^{-1} u) \tag{1.26}$$

et

$$K' = \gamma_0(\widetilde{K}) = \left\{ v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \ ; \ v \geqslant u_0 \right\} . \tag{1.27}$$

Alors

$$(1.13) \Longleftrightarrow (1.28) \qquad u \in K' \ , \ \overline{J}(u) = \operatorname*{Min}_{v \in K'} \overline{J}(v) .$$

De même, définissons

$$A : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad \text{linéaire, continue}$$

$$u \to \gamma_1 \circ \gamma_0^{-1}(u) = \frac{\partial}{\partial n} (\gamma_0^{-1} u)$$

et

$$\overline{a} : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \to \mathbb{R}$$

$$(u , v) \to \overline{a}(u,v) = < Au, v >_{H^{\frac{1}{2}}, H^{-\frac{1}{2}}} .$$

$\bar{a}$ est symétrique, bilinéaire, continue, positive.

$$\bar{J}(v) = \frac{1}{2}\bar{a}(v,v) - \langle v,g \rangle \quad \text{est G-différentiable,}$$

et donc

$$(1.28) \Longleftrightarrow (1.29) \quad u \in K' \ , \ \bar{a}(u,v-u) \geqslant \langle v-u, g \rangle \ , \ \forall\, v \in K'$$

(ce qui, par γ_0 , γ_0^{-1} , est équivalent à (1.13)').

Le problème sera approché sous la forme (1.28), tandis que la forme (1.29) sera utile pour l'étude d'erreurs.

REMARQUE 1.4 : Par la continuité de γ_0 et de γ_0^{-1} , on vérifie que (1.26) est coercive sur K' si et seulement si (1.9) l'est sur $\widetilde{K}$. Ceci assure l'existence de la solution de (1.28) si $(g,1)_{L^2(\Gamma)} < 0$ (N).

REMARQUE 1.5 : (utile uniquement dans l'étude de la régularité et de l'erreur d'approximation) ; revenons à la Remarque 1.3. u étant la solution de (1.13)', alors,

$$u = \tilde{u} + \gamma_0^{-1} u_0$$

où $\tilde{u}$ est solution du problème homogène.

$$(1.30) \quad \begin{cases} \tilde{u} \in \widetilde{K}_0 = \left\{ v \in \mathcal{H}(\Omega) \ ; \ v|_\Gamma \geqslant 0 \right\} \\ a(\tilde{u},v-\tilde{u}) \geqslant \langle v-\tilde{u},\tilde{g}\rangle, \ \forall\, v \in \widetilde{K}_0 \ , \end{cases}$$

avec

$$\tilde{g} = g - \frac{\partial}{\partial n} \gamma_0^{-1} u_0$$

($\langle \ \rangle$ désignant la dualité $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$). $\tilde{u}$ existe et est unique car

$$\langle \tilde{g},1 \rangle = \langle g,1 \rangle = (g,1)_{L^2(\Gamma)} < 0 \ .$$

De manière similaire, la solution u de (1.29) s'écrit $u = \tilde{u} + u_0$ où $\tilde{u}$ est solution du problème homogène (équivalent de (1.30) dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$)

(N) On peut donc identifier $\langle \ ,g \rangle$ *à* $(\ ,g)_{L^2(\Gamma)}$ *puisque* $g \in L^2(\Gamma)$ *est appliqué à des éléments de* $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

$$(1.30)' \quad \begin{cases} \tilde{u} \in K_0' = \left\{ v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \ ; \ v \geq 0 \right\} \\ a(\tilde{u}, v-\tilde{u}) \geq < v-\tilde{u}, \tilde{g} > \ , \ \forall \ v \in K_0' \end{cases}$$

I.4 - REGULARITE

Nous savons - Remarque 1.5 - que la solution u de (1.2)-(1.3)-(1.4) s'écrit $u = \tilde{u} + \gamma_0^{-1} u_0$, où $\tilde{u}$ est la solution du problème (1.30). La régularité de u dépend donc de celle de $\tilde{u}$ et $\gamma_0^{-1} u_0$. D'après LIONS-MAGENES [25, vol.1], $\forall$ s réel, $s \geq 1$, si $u_0 \in H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, alors $\gamma_0^{-1} u_0 \in H^s(\Omega)$ pourvu que l'on ait $s \neq \frac{3}{2}$. Nous prendrons $s > \frac{3}{2}$ afin que $\tilde{g} = g - \frac{\partial}{\partial n} \gamma_0^{-1} u_0$ soit dans $L^2(\Gamma)$ comme g.

Il ne reste donc qu'à étudier la régularité de $\tilde{u}$ solution de (1.30). Nous utilisons, pour cela, la technique des opérateurs de pénalisation (Cf. LIONS [23], pour une présentation générale de cette technique). Soit

$$\beta : H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)' \ , \quad H^1(\Omega)' = \text{dual de } H^1(\Omega)$$

$$u \to \beta u \quad \text{tq} \quad < \beta u, v > = -\int_\Gamma u^-(x)\, v(x)\, d\Gamma_x \ , \ \forall\, v \in H^1(\Omega)$$

où

$$u^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } u(x) \geq 0 \\ -u(x) & \text{si } u(x) < 0 \end{cases} \qquad \text{et} \quad < \ > = \text{dualité } H^1(\Omega),\ H^1(\Omega)' \ .$$

$$\beta u = 0 \ \text{ si et seulement si } \ u \in K_0 = \left\{ v \in H^1(\Omega) \ ; \ v|_\Gamma \geq 0 \right\} .$$

On vérifie que β est monotone, borné et hémicontinu. Soit alors le problème pénalisé

$$(1.31) \qquad \begin{cases} \varepsilon > 0 \ \text{ donné, trouver } \ u_\varepsilon \in H^1(\Omega) \ \text{ tq} \\ a(u_\varepsilon, v) + \frac{1}{\varepsilon} < \beta u_\varepsilon, v > = \int_\Gamma \tilde{g}\, v\, d\Gamma \ , \ \forall\, v \in H^1(\Omega) \end{cases}$$

avec

$$a(u_\varepsilon, v) = \int_\Omega \nabla u_\varepsilon . \nabla v \ d\omega$$

comme le donnait (1.3). Si une solution u_ε existe, elle vérifie (au sens faible)

$$(1.32) \qquad \begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = 0 \ \text{ dans } \ \Omega \ , \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} - \frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon = \tilde{g} \ \text{ sur } \ \Gamma \ . \end{cases}$$

Existence de u_ε

Soit

(1.33) $$F : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$
$$v \to F(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 \, d\omega - \frac{1}{2\varepsilon}\int_\Gamma v^- v \, d\Gamma - \int_\Gamma v\, \tilde{g} \, d\Gamma .$$

PROPOSITION 1.3 : F donné par (1.33) est G-différentiable avec

$$< F'(u), v >_{H^1, H^1} = a(u,v) + \frac{1}{\varepsilon} < \beta u, v > - (\tilde{g}, v) \quad , \forall\, v \in H^1(\Omega).$$

F' est monotone, et donc F est convexe.

Démonstration : Il faut calculer F'(u). La seule difficulté réside dans le calcul de la différentielle de

$$F_1(u) = -\frac{1}{2}\int_\Gamma u^- u \, d\Gamma = \frac{1}{2}\int_\Gamma (u^-(x))^2 \, d\Gamma_x .$$

$0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ donné,

$$\frac{F_1(u+\lambda v) - F_1(u)}{\lambda} = \frac{1}{2}\int_\Gamma \frac{[(u+\lambda v)^-(x)]^2 - [u^-(x)]^2}{\lambda} \, d\Gamma_x .$$

Or, pour tout $x \in \Gamma$,

$$\frac{[(u+\lambda v)^-(x)]^2 - [u^-(x)]^2}{\lambda} \underset{\lambda \to 0}{\to} -2u^-(x)\, v(x)$$

et

$$\left|\frac{[(u+\lambda v)^-(x)^{\,2} - u^-(x)]^2}{\lambda}\right| = \left|\frac{[(u+\lambda v)^-(x) - u^-(x)]\,[(u+\lambda v)^-(x) + u^-(x)]}{\lambda}\right|$$
$$\leqslant |v(x)|\, |(u+\lambda v)^-(x) + u^-(x)|$$
$$\leqslant |v(x)|\, (2|u(x)| + |v(x)|) \quad \text{intégrable.}$$

Alors, le théorème de Lebesgue permet de dire que

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{F_1(u+\lambda v) - F_1(u)}{\lambda} = -\int_\Gamma u^-(x)\, v(x) \, d\Gamma_x = < \beta u, v >$$

d'où l'expression de F'(u) (Remarque : la première inégalité ci-dessus vient

du fait que $|u^-(x)-v^-(x)| \leq |u(x)-v(x)|$, $\forall\, x \in \Gamma$).

Il est clair que F' est monotone puisque β l'est. Ceci implique que F est convexe (pour la démonstration de ce point, on peut consulter [11]). ■

PROPOSITION 1.4 : F *donné par (1.33) est s.c.i. et*

$$F(v) \to +\infty \quad \text{quand} \quad \|v\|_{H^1(\Omega)} \to +\infty .$$

Par conséquent, il existe u_ε *tel que*

$$F(u_\varepsilon) = \inf_{v \in H^1(\Omega)} F(v)$$

et u_ε *est solution de (1.31).*

Démonstration : S'il existe u_ε tel que $F(u_\varepsilon) = \inf_{v \in H^1(\Omega)} F(v)$, il est caractérisé par

$$< F'(u_\varepsilon), v-u_\varepsilon > \geqslant 0 \ , \ \forall\, v \in H^1(\Omega) \ ,$$

ce qui n'est autre que (1.31).

On montre la coercivité de F : μ désigne toujours la mesure de Lebesgue sur Γ ; on a

$$F(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 \, d\omega - \frac{1}{2\varepsilon}\int_\Gamma v^- v \, d\Gamma - \int_\Gamma v\, \tilde{g}\, d\Gamma \ .$$

Rappelons que l'application

$$H^1(\Omega) \to H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$$

$$v \ \to \ v^+ , v^-$$

est continue (Cf. STAMPACCHIA [22]), mais cependant non linéaire.

$$v = v^+ - v^- \quad \text{et} \quad v^+ v^- = 0$$

donc

$$F(v) = \frac{1}{2}\int_\Gamma |\nabla v|^2 \, d\omega + \frac{1}{2\varepsilon}\int_\Gamma (v^-)^2 \, d\Gamma - \int_\Gamma \tilde{g}\, v \, d\Gamma \ .$$

Posons

$$\overline{v} = \frac{1}{\mu(\Gamma)}\int_\Gamma v \, d\Gamma = \frac{1}{\mu(\Gamma)}\int_\Gamma v^+ \, d\Gamma - \frac{1}{\mu(\Gamma)}\int_\Gamma v^- \, d\Gamma \ ,$$

que l'on peut noter

$$\overline{v} = \overline{v}^+ - \overline{v}^- .$$

Soit

$$\widetilde{v} = v - \overline{v} \ ;$$

alors

$$\int_\Gamma \widetilde{v} \, d\Gamma = 0$$

et

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 \, d\omega = \int_\Omega |\nabla \widetilde{v}|^2 \, d\omega = |||\, \widetilde{v} \,|||^2 \geqslant \beta_2 \|\widetilde{v}\|^2_{H^1(\Omega)}$$

d'après le Lemme 1.1, ce qui permet d'écrire

$$F(v) \geqslant \frac{\beta_2}{2} \|\widetilde{v}\|^2 - \int_\Gamma \widetilde{g}\, \widetilde{v} \, d\Gamma + \frac{1}{2\varepsilon} \int_\Gamma (v^-)^2 \, d\Gamma - \overline{v} \int_\Gamma \widetilde{g} \, d\Gamma \ ; \tag{1.34}$$

or

$$\left| \int_\Gamma \widetilde{g}\, \widetilde{v} \, d\Gamma \right| \leqslant \|\widetilde{g}\|_{L^2(\Gamma)} \, \|\widetilde{v}\|_{L^2(\Gamma)} \leqslant c \, \|\widetilde{v}\|^2_{H^1(\Omega)} \ ,$$

ce qui donne

$$F(v) \geqslant \frac{\beta_2}{2} \|\widetilde{v}\|^2 - c \, \|\widetilde{v}\| - \overline{v}^+ \int_\Gamma \widetilde{g} \, d\Gamma + \frac{1}{2\varepsilon} \int_\Gamma (v^-)^2 \, d\Gamma + \overline{v}^- \int_\Gamma \widetilde{g} \, d\Gamma \ ;$$

d'autre part

$$\overline{v}^- = \frac{1}{\mu(\Gamma)} \int_\Gamma v^- \, d\Gamma$$

donne (par l'inégalité de Schwartz)

$$\mu(\Gamma)(\overline{v}^-)^2 = \frac{1}{\mu(\Gamma)} \left(\int_\Gamma v^- d\Gamma \right)^2 \leqslant \int_\Gamma (v^-)^2 \, d\Gamma \ ;$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\varepsilon} \int_\Gamma (v^-)^2 \, d\Gamma + \frac{1}{\mu(\Gamma)} \int_\Gamma v^- d\Gamma \int \widetilde{g} \, d\Gamma &\geqslant \frac{1}{2\varepsilon \, \mu(\Gamma)} \left(\int_\Gamma v^- d\Gamma \right)^2 + \frac{1}{\mu(\Gamma)} \int_\Gamma v^- d\Gamma \int \widetilde{g} \, d\Gamma \\ &\geqslant \frac{1}{\mu(\Gamma)} \int_\Gamma v^- \, d\Gamma \left[\frac{1}{2\varepsilon} \int_\Gamma v^- \, d\Gamma + \int \widetilde{g} \, d\Gamma \right] \\ &= \overline{v}^- \left[\frac{\mu(\Gamma)}{2\varepsilon} \overline{v}^- + \int_\Gamma \widetilde{g} \, d\Gamma \right] . \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$F(v) \geqslant \frac{\beta_2}{2} \|\widetilde{v}\|^2 - c \, \|\widetilde{v}\| - \overline{v}^+ \int_\Gamma \widetilde{g} \, d\Gamma + \overline{v}^- \left[\frac{\mu(\Gamma)}{2\varepsilon} \overline{v}^- + \int_\Gamma \widetilde{g} \, d\Gamma \right] . \tag{1.35}$$

On déduit de (1.31) qu'une condition nécessaire d'existence de u_ε est $\int_\Gamma \tilde{g}\, d\Gamma < 0$; ceci assure en fait que

$$F(v) \to +\infty$$

$$\|v\| \to +\infty$$

En effet,

$$v = \tilde{v} + \bar{v} \Rightarrow |||\, v\,|||^2 = \int_\Omega |\nabla v|^2\, d\omega + \left(\int_\Gamma v\, d\Gamma\right)^2$$

$$= |||\, \tilde{v}\,|||^2 + \bar{v}^2\, \mu(\Gamma)^2$$

où $|||\, .\,|||$ est la norme équivalente à $\|\,.\,\|$ définie dans le lemme 1.2. Si $\|v\| \to +\infty$, il en sera de même pour $|||\, v\,|||$ ce qui implique que $|||\, \tilde{v}\,||| \to +\infty$ (donc $\|\tilde{v}\| \to +\infty$) où $\bar{v}^2 \to +\infty$, ce qui veut dire que $\bar{v} \to +\infty$ ou $\bar{v} \to -\infty$. Si $\|\tilde{v}\| \to +\infty$ et $\bar{v}$ fini, ou $\bar{v} \to +\infty$, alors le second membre de (1.34) tend vers $+\infty$. Il en sera de même si $\|\tilde{v}\|$ fini et $\bar{v} \to +\infty$. Cependant, si $\bar{v} \to -\infty$, alors $\bar{v}^- \to +\infty$, et en tout état de cause, le second membre de (1.35) tend vers $+\infty$. Dans ces conditions, F étant s.c.i., l'existence de u_ε est alors assurée (Cf. LIONS [24], EKELAND-TEMAM [11], par exemple).

Passons maintenant à l'unicité de u_ε : soient u_ε^1, u_ε^2, deux solutions de (1.32). Si $w = u_\varepsilon^1 - u_\varepsilon^2$, w vérifie

$$(1.32)' \quad \begin{cases} -\Delta w = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega\ ; \\ \dfrac{\partial w}{\partial n} = \dfrac{1}{\varepsilon}\,(u_\varepsilon^{1-} - u_\varepsilon^{2-}), \end{cases}$$

équation qui a au moins une solution puisque

$$\int_\Gamma u_\varepsilon^{1-} = \int_\Gamma u_\varepsilon^{2-} = \varepsilon \int_\Gamma \tilde{g}\ .$$

La forme variationnelle équivalente de (1.32)' est

$$w \in H^1(\Omega),$$

$$\int_\Omega \nabla w.\nabla v = \frac{1}{\varepsilon}\int_\Gamma (u_\varepsilon^{1-} - u_\varepsilon^{2-})\, v\ ,\ \forall\ v \in H^1(\Omega).$$

En particulier, pour $v = w = u_\varepsilon^1 - u_\varepsilon^2$, on obtient que

$$\int_\Omega |\nabla w|^2 \leqslant 0 \Rightarrow w = \text{constante},$$

donc

$$u_\varepsilon^1 = u_\varepsilon^2 + c \ .$$

On peut prendre $c < 0$; en traduisant la condition sur Γ de (1.32)', on a

$$u_\varepsilon^{2-} = (u_\varepsilon^2 + c)^- \ .$$

Puisque $\int_\Gamma \tilde{g}\, d\Gamma < 0$, il existe $x \in \Gamma$ telle que $u_\varepsilon^{2-}(x) \neq 0$; alors $u_\varepsilon^{2-} = (u_\varepsilon^2 + c)^-$ devient

$$u_\varepsilon^2(x) = u_\varepsilon^2(x) + c \ ,$$

donc

$$c = 0 \ . \qquad \blacksquare$$

REMARQUE 1.6 : u_ε est caractérisé par (1.31), c.à.d. que

$$< F'(u_\varepsilon), v > \ = 0 \ , \quad \forall\, v \in H^1(\Omega) \ ;$$

en prendant $v = u_\varepsilon$, on a

$$< F'(u_\varepsilon), u_\varepsilon > = 0 \ ;$$

or

$$\forall\, v \in H^1(\Omega), \ < F'(v), v > \geqslant F(v) \ ,$$

donc

$$F(u_\varepsilon) \leqslant 0 \ .$$

La coercivité de F implique donc que u_ε est borné indépendamment de ε .

Nous allons établir que $u_\varepsilon \to u$ faiblement dans $H^1(\Omega)$ et déterminer la régularité de u_ε .

Passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$.

Soit w la limite faible de u_ε (plus précisément, d'une sous-suite de u_ε). De (1.31), on déduit

$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_\Gamma u_\varepsilon^- v \, d\Gamma = -\int_\Omega \nabla u_\varepsilon . \nabla v + \int_\Gamma \tilde{g} \, v \, d\Gamma \ , \ \forall \ v \in H^1(\Omega),$$

donc

$$\left|\int_\Gamma u_\varepsilon^- v \, d\Gamma\right| \leqslant \varepsilon \left(\| u_\varepsilon \| + c \, \| \tilde{g} \|_{L^2(\Gamma)} \right) \| v \| \ .$$

Si c' est telle que $\| u_\varepsilon \| \leqslant c'$ pour tout ε , alors

$$| < \beta u_\varepsilon , v > | \leqslant \varepsilon \left(c' + c \, \| \tilde{g} \|_{L^2(\Gamma)} \right) \| v \| \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0 \ , \ \forall \ v \in H^1(\Omega),$$

c.à.d.

(1.36) $$\beta u_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0 \text{ dans } (H^1(\Omega))' \ ;$$

avec $v = u_\varepsilon$, on a

$$| < \beta u_\varepsilon , u_\varepsilon > | \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0 \ .$$

β étant monotone, on a

$$< \beta u_\varepsilon - \beta v , u_\varepsilon - v > \geqslant 0 \ , \ \forall \ v \in H^1(\Omega),$$

donc

(1.37) $$< \beta u_\varepsilon , u_\varepsilon > + < \beta u_\varepsilon , -v > - < \beta v , u_\varepsilon - v > \geqslant 0 \ .$$

En faisant tendre ε vers 0 , ceci devient

$$- < \beta v , w - v > \geqslant 0 \ , \ \forall \ v \in H^1(\Omega) \ .$$

En prenant $v = w - \lambda\psi$, $\lambda > 0$ et $\psi \in H^1(\Omega)$ quelconque, on a

$$- < \beta(w - \lambda\psi) , \psi > \geqslant 0 \ ,$$

et si $\lambda \to 0$, ceci donne

$$- < \beta w , \psi > \geqslant 0 \ , \ \forall \ \psi \in H^1(\Omega),$$

donc

$$\beta w = 0 \ , \text{ i.e. } \ w \in K_0 \ .$$

En écrivant (1.31) avec $v - u_\varepsilon$ (au lieu de v), $v \in K_0$, on a

$$a(u_\varepsilon, v-u_\varepsilon) - (\tilde{g}, v-u_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} < \beta u_\varepsilon - \beta v, u_\varepsilon - v >_{H^1, H^1} \geqslant 0 \quad .$$

car β est monotone ; donc

$$a(u_\varepsilon, u_\varepsilon - v) \leqslant (\tilde{g}, u_\varepsilon - v) \quad , \quad \forall\, v \in K_0 \quad .$$

a étant s.c.i., si $\varepsilon \to 0$, on a

$$a(w,w) \leqslant \liminf_{\varepsilon \to 0} a(u_\varepsilon, u_\varepsilon),$$

donc

$$a(w, w-v) \leqslant (\tilde{g}, w-v)_{L^2(\Gamma)} \quad , \quad \forall\, v \in K_0 \quad ,$$

c.à.d. que w est solution de (1.4) avec K_0 au lieu de $\tilde{K}$ et $\tilde{g}$ au lieu de g.

Les mêmes raisonnements permettent d'affirmer que w est solution de (1.13)', avec K_0 au lieu de $\tilde{K}$, et $\tilde{g}$ au lieu de g, ce qui n'est autre que (1.30). L'unicité de la solution implique que $w = \tilde{u}$.

Résultat de régularité

En posant $v = -u_\varepsilon^-$ dans (1.31), on obtient

$$a(u_\varepsilon, -u_\varepsilon^-) + \frac{1}{\varepsilon} \int_\Gamma |u_\varepsilon^-|^2 \, d\Gamma = -\int_\Gamma \tilde{g}\, u_\varepsilon^- \, d\Gamma \quad .$$

Or

$$a(u_\varepsilon, -u_\varepsilon^-) = a(-u_\varepsilon^-, -u_\varepsilon^-) \geqslant 0 \quad ;$$

donc

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_\Gamma |u_\varepsilon^-|^2 \, d\Gamma \leqslant \|\tilde{g}\|_{L^2(\Gamma)} \, \|u_\varepsilon^-\|_{L^2(\Gamma)} \quad ,$$

ce qui donne

$$\|\frac{u_\varepsilon^-}{\varepsilon}\|_{L^2(\Gamma)} \leqslant \|\tilde{g}\|_{L^2(\Gamma)} \quad . \tag{1.38}$$

Par conséquent, u_ε est solution du problème de Neumann suivant

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \quad , \\ \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = \dfrac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon^- + \tilde{g} \in \text{borné de } L^2(\Gamma). \end{cases}$$

D'après LIONS-MAGENES [25, vol. 1] (§ sur l'existence des solutions des équations elliptiques d'ordre $2m$ dans les espaces $H^s(\Omega)$ avec s réel, $0 < s < 2m$), u_ε demeure dans un borné de $H^{\frac{3}{2}}(\Omega)$, donc $\tilde{u} \in H^{\frac{3}{2}}(\Omega)$.

CHAPITRE II

ÉTUDE DU PROBLÈME APPROCHÉ

II.1 - APPROXIMATION DE LA SURFACE Γ .

Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^3$ de bord $\partial\Omega = \Gamma$ régulièr. Γ peut être définie de la manière suivante : il existe un nombre fini p d'ouverts de $\mathbf{R}^2$, $(\theta_\ell)_{\ell=1,p}$ et d'applications bijectives $(\phi_\ell)_{\ell=1,p}$ de θ_ℓ dans $\mathbf{R}^3$ telles que

i) $$\phi_\ell : \theta_\ell \to \phi_\ell(\theta_\ell)$$
$$(\xi,\eta) \to \phi_\ell(\xi,\eta)$$

soit suffisamment différentiable, de sorte que les vecteurs tangents à $\phi_\ell(\theta_\ell)$, $\frac{\partial\phi_\ell}{\partial\xi}$ et $\frac{\partial\phi_\ell}{\partial\eta}$ soient indépendants ;

ii) $$\Gamma \subset \bigcup_{\ell=1}^{p} \phi_\ell(\theta_\ell) ;$$

iii) et pour tout ℓ , k , compris entre 1 et p ,

$$\phi_\ell^{-1} \circ \phi_k : \phi_k^{-1}[\phi_\ell(\theta_\ell) \cap \phi_k(\theta_k)] \to \phi_\ell^{-1}[\phi_\ell(\theta_\ell) \cap \phi_k(\theta_k)]$$

est bijective et différentiable.

Supposons que, $\forall\, \ell$, $1 \leqslant \ell \leqslant p$, il existe un polyèdre $D_\ell \subset \theta_\ell$ tel que (si l'on note $\phi_\ell(D_\ell) = \Gamma_\ell$) :

$$\Gamma = \bigcup_{\ell=1}^{p} \Gamma_\ell \ ;$$

pour tout $\ell \neq k$, $\Gamma_\ell \cap \Gamma_k$ est une courbe de Γ ;

alors, à chaque D_ℓ , $\ell = 1,p$, on associe une triangulation $\mathcal{T}_{h\ell}$ telle que les triangles vérifient la condition classique des angles :

$\theta \geqslant \theta_0 > 0$, θ_0 indépendant de h .

On considère l'élément fini (K,Σ,P) où K est un triangle, $\Sigma = \left\{\text{sommets de } K\right\}$ et $P = \mathbf{P}_1$.

On notera $\phi_{\ell h}$ l'interpolé de ϕ_ℓ sur chaque triangle de $\mathcal{T}_{h\ell}$ par (K,Σ,P) ; l'image de D_ℓ par $\phi_{\ell h}$ est alors une surface continue constituée de triangles plats de sommets portés par Γ ; on note $\Gamma_{h\ell} = \phi_{\ell h}(D_\ell)$ et on

suppose que $\Gamma_h = \bigcup_{\ell=1}^{p} \Gamma_{h\ell}$ est une surface fermée et que $\Gamma_{h\ell} \cap \Gamma_{hk}$ pour $\ell \neq k$ est une courbe continue sur Γ_h .

Pour h assez petit, Γ et Γ_h sont homéomorphes par l'application

$$\psi : \Gamma_h \to \Gamma$$

$$x_h \to \psi(x_h)$$

où $\psi(x_h)$ est la projection de x_h sur Γ . Pour l'étude des proppriétés de ψ nous renvoyons à NEDELEC [29].

Dans la suite, $\mathcal{T}_h$ désignera l'ensemble des triangles K_h constituant Γ_h .

II.2 - DEFINITION DU PROBLEME APPROCHE

1) Définition du problème approché (P_h^1) sur Γ_h .

Nous avions établi que résoudre

$$(1.1)\qquad \begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \ , \\ u - u_0 \geqslant 0 \ , \ \dfrac{\partial u}{\partial n} - g \geqslant 0 \\ (u-u_0)\left(\dfrac{\partial u}{\partial n} - g\right) = 0 \end{cases} \qquad \text{sur} \quad \Gamma \ ,$$

se ramenait à minimiser $\overline{J} : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \to \mathbf{R}$,

$$\overline{J}(v) = \frac{1}{2}\int_\Gamma v \frac{\partial}{\partial n}\left(\gamma_0^{-1} v\right) d\Gamma - \int_\Gamma v\, g \, d\Gamma$$

sur le convexe

$$K' = \left\{ v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad \text{tq} \quad v \geqslant u_0 \right\}$$

De même, en posant comme problème approché de (1.1) le problème

$$(2.1)\qquad \begin{cases} \Delta u_h = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_h \ , \\ u_h - u_0 \circ \psi \geqslant 0 \ , \ \dfrac{\partial u_h}{\partial n_h} - g \circ \psi \geqslant 0 \\ (u_h - u_0 \circ \psi)\left(\dfrac{\partial u_h}{\partial n_h} - g \circ \psi\right) = 0 \end{cases} \qquad \text{sur} \quad \Gamma_h \ ,$$

on se ramène à minimiser $\overline{J}_h : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_h) \to \mathbf{R}$,

$$(2.2)\qquad \overline{J}_h(v_h) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_h} v_h \frac{\partial}{\partial n_h}\left(\gamma_{0h}^{-1} v_h\right) d\Gamma_h - \int_{\Gamma_h} v_h \, g \circ \psi \, d\Gamma_h$$

sur le convexe

$$(2.3)\qquad K_h' = \left\{ v_h \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_h) \ ; \ v_h \geqslant u_0 \circ \psi \right\}$$

où γ_{0h} désigne l'application trace de

$$(2.4)\qquad \mathcal{H}(\Omega_h) = \left\{ v_h \in H^1(\Omega_h) \ ; \ \Delta v_h = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_h \right\}$$

dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_h)$.

Le problème (P_h^2)

$$(2.5)\qquad \begin{cases} \text{trouver} \quad u_h \in K_h' \quad \text{telle que} \\ \overline{J}_h(u_h) = \underset{v_h \in K_h'}{\text{Min}} \ \overline{J}_h(v_h) \end{cases}$$

a la forme équivalente

$$(2.6)\qquad \begin{cases} \text{trouver } u_h \in K_h' \text{ telle que} \\ \overline{a}_h(u_h, v_h - u_h) \geq (v_h - u_h, g\circ\psi)_{L^2(\Gamma_h)} \ , \ \forall\, v_h \in K_h' \ . \end{cases}$$

où

$$\overline{a}_h : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_h) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_h) \to \mathbf{R} \quad \text{symétrique}$$

$$(v_h \ , \ u_h) \qquad \to \overline{a}_h(v_h, u_h) = \int_{\Gamma_h} v_h \frac{\partial}{\partial n_h}(\gamma_{0h}^{-1} u_h)\, d\Gamma_h = \int_{\Gamma_h} u_h \frac{\partial}{\partial n_h}(\gamma_{0h}^{-1} v_h)\, d\Gamma_h$$

2) $(\mathcal{P}_h^2)$: <u>approximation de la solution u_h de (2.5) à l'aide d'éléments finis de Lagrange</u>

Notre but est de construire un espace vectoriel V_h de dimension finie contenu dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_h)$, dont les éléments "approchent" ceux de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_h)$, et dans lequel (2.5) sera alors une minimisation de fonctionnelle quadratique en dimension finie.

(K,Σ,P) désignant le même élément fini qui a servi à construire Γ_h, si l'on note F la restriction à K de l'application $\phi_{\ell h}$ définie en II.1, on peut alors définir

$$V_h = \left\{ v_h \in C^0(\Gamma_h) \quad \text{tq} \quad v_h \circ F|_K \in \mathbf{P}_1 \right\} ,$$

où K désigne un triangle quelconque de $\mathcal{T}_{h\ell}$.

On remarque tout de suite que $\phi_{\ell h}$ et $\phi_{\ell h}^1$ étant affines, si l'on pose $K^* = \phi_{\ell h}(K)$, $v_h \circ \phi_{\ell h}|_K \in \mathbf{P}_1$ se traduit par $v_h|_{K^*} \in \mathbf{P}_1$ où, cette fois-ci, on considère les polynômes de degré 1 en coordonnées locales.

V_h est inclus dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_h)$ et $\dim(V_h) = NN < +\infty$. En fait, puisque les degrés de liberté sont les valeurs aux noeuds de Γ_h (c.à.d. aux sommets des triangles constituant Γ_h), si l'on note $\{a_j\}_{1\leq j\leq NN}$ ces points, tout élément $v_h \in V_h$ est défini sans ambiguité par ses valeurs en ces points car $v_h|_{K^*}$ (K^* quelconque parmi les constituants de Γ_h) est déterminé par

ses valeurs aux sommets de K^* .

Une base de V_h est constituée par les fonctions v_h^i , $1 \leqslant i \leqslant NN$, définies par

$$(2.7) \qquad \begin{cases} v_h^i \in V_h \\ v_h^i(a_j) = \delta_{ij} \ , \ \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \ , \ j = 1,NN \ ; \end{cases}$$

$\{v_h^i\}_{1 \leqslant i \leqslant NN}$ étant une famille libre et génératrice de V_h .

On peut illustrer ce dernier fait de la manière suivante : soit K^* un élément de $\mathcal{T}_h$, a_{j_1} , a_{j_2} , a_{j_3} , ses sommets, et x un point de K^* de coordonnées barycentriques α , β , γ qui doivent vérifier les relations $\alpha,\beta,\gamma \geqslant 0$, $\alpha+\beta+\gamma = 1$ et $x = \alpha\, a_{j_1} + \beta\, a_{j_2} + \gamma\, a_{j_3}$.

Pour $v_h \in V_h$, $v_h|_{K^*}$ est affine et donc

$$v_h(x) = \alpha\, v_h(a_{j_1}) + \beta\, v_h(a_{j_2}) + \gamma\, v_h(a_{j_3}).$$

Cette relation se vérifie rapidement, au besoin en se ramenant à des coordonnées locales. Ceci donne, en particulier,

$$v_h^{j_1}(x) = \alpha \ , \quad v_h^{j_2}(x) = \beta \ , \quad v_h^{j_3}(x) = \gamma \ ;$$

par conséquent

$$v_h(x) = v_h^{j_1}(x).v_h(a_{j_1}) + v_h^{j_2}(x).v_h(a_{j_2}) + v_h^{j_3}(x).v_h(a_{j_3}) \ ,$$

ce que l'on peut écrire plus généralement :

$$(2.8) \qquad \begin{cases} \text{pour tout } x \in \Gamma_h \ , \\ v_h(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{NN} v_h(a_j)\, v_h^j(x) \ . \end{cases}$$

$(\mathcal{P}_h^2)$, le nouveau problème approché, s'obtient alors en remplaçant dans (2.3), (2.4), (2.5), $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_h)$ par V_h .

Pour tout i , $1 \leqslant i \leqslant NN$, notons

$$(2.9) \qquad V_h^i = \gamma_{0h}^{-1}\, v_h^i \quad \text{et} \quad \widetilde{V}_h = \gamma_{0h}^{-1}\, v_h \ , \ v_h \in V_h \ .$$

γ_{0h} étant bijective, on a

$$\tilde{v}_h(x) = \sum_{i=1}^{NN} \nu_h(a_i)\, v_h^i(x) \quad , \forall\, x \in \mathbb{R}^3 \tag{2.10}$$

et

$$\frac{\partial \tilde{v}_h}{\partial n_h}(x) = \sum_{i=1}^{NN} \nu_h(a_i)\, \frac{\partial v_h^i}{\partial n_h}(x), \quad \forall\, x \in \Gamma_h \ . \tag{2.11}$$

Alors,

$$\bar{J}_h(\nu_h) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_h} \nu_h(x)\, \frac{\partial \tilde{v}_h}{\partial n_h}(x)\, d\Gamma_h - \int_{\Gamma_h} \nu_h(x) g\circ\psi(x)\, d\Gamma_h(x).$$

Posons

$$a_{ij}^h = a_{ji}^h = \int_{\Gamma_h} v_h^i(x)\, \frac{\partial v_h^j}{\partial n_h}(x)\, d\Gamma_h = \int_{\Gamma_h} v_h^j(x)\, \frac{\partial v_h^i}{\partial n_h}(x)\, d\Gamma_h \ ; \tag{2.12}$$

$$b_i^h = \int_{\Gamma_h} v_h^i(x) g\circ\psi(x) d\Gamma_h(x) \ ; \tag{2.13}$$

$$\bar{\nu}_h = \begin{vmatrix} \nu_h(a_1) \\ \vdots \\ \nu_h(a_{NN}) \end{vmatrix} \tag{2.14}$$

$A_h = (a_{ij}^h)_{1\leq i,j\leq NN}$ matrice carrée $NN \times NN$ symétrique

$$B_h = \begin{vmatrix} b_1^h \\ \vdots \\ b_{NN}^h \end{vmatrix} \ ; \tag{2.15}$$

Alors, on a

$$\bar{J}_h(\nu_h) = \frac{1}{2} (\bar{\nu}_h, A_h \bar{\nu}_h) - (B_h, \bar{\nu}_h), \tag{2.16}$$

où $(\ ,\ )$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^{NN}$.

En remplaçant K_h' par $K_h = K_h' \cap V_h$, c.à.d.

$$K_h = \left\{ \bar{\nu}_h = (\nu_h(a_1), \ldots, \nu_h(a_{NN})) \in \mathbb{R}^{NN} \text{ tq } \nu_h(a_i) \geqslant u_0(a_i),\ 1 \leqslant i \leqslant NN \right\} \tag{2.17}$$

nous aurons à résoudre (P_h^2) :

$$\begin{cases} \text{trouver } u_h \in K_h \subset V_h \ (\Rightarrow \bar{u}_h \in \mathbb{R}^{NN}) \text{ tel que} \\ \bar{J}_h(u_h) = \underset{\nu_h \in K_h}{\text{Min}}\ \bar{J}_h(\nu_h). \end{cases} \tag{2.18}$$

II.3 - CALCUL DES COEFFICIENTS a_{ij}^h . DEFINITION DU PROBLEME APPROCHE FINAL.

Rappel

$$V_h = \left\{ v_h \in C^0(\Gamma_h) \quad tq \quad v_h \circ F|_{T_{h\ell}} \in \mathbf{P}_1 \, , \, \forall \, T_{h\ell} \in \mathcal{T}_h \right\} ;$$

$\{v_h^i\}_{1 \leq i \leq NN}$: base de V_h donnée par (2.7) ;

$V_h^i \in \mathcal{H}(\Omega_h)$: donné par (2.9) ;

c.à.d.

$$(2.19) \qquad \begin{cases} -\Delta V_h^i = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_h \, ; \\ V_h^i|_{\Gamma_h} = v_h^i \, . \end{cases}$$

Nous avons

$$(2.12) \qquad a_{ij}^h = \int_{\Gamma_h} v_h^i(x) \, \frac{\partial V_h^j}{\partial n_h}(x)\Big|_{\text{int } \Gamma_h} d\Gamma_h(x)$$

Il est clair que même si on avait une expression analytique de la solution de (2.19) pour $1 \leq i \leq NN$, le calcul de (2.12) ne pourrait se faire qu'approximativement, à l'aide de l'intégration numérique. On aurait, par exemple,

$$(2.20) \qquad a_{ij}^h = \sum_{\ell=1}^{NQ} \int_{T_{h,\ell}} v_h^i(x) \, \frac{\partial V_h^j}{\partial n_h}(x) d\Gamma_h(x) \simeq \sum_{\ell=1}^{NQ} S(T_{h,\ell}) \sum_{m=1}^{ID} w_m \, v_h^i(b_m^\ell) \, \frac{\partial V_h^j}{\partial n_h}(b_m^\ell),$$

où $T_{h,\ell} \in \mathcal{T}_h$, $\{b_m^\ell\}_{1 \leq m \leq ID}$ représente les ID noeuds d'intégration du triangle $T_{h,\ell}$, $\{w_m\}_{1 \leq m \leq ID}$, les poids d'intégration, $S(T_{h,\ell})$ la surface de $T_{h,\ell}$.

Puisque nous allons résoudre (2.19) à l'aide d'une représentation en potentiel de simple couche, nous aurons

$$(2.21) \qquad V_h^j(y) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_h} \frac{q_h^j(x)}{|x-y|} \, d\Gamma_h(x) \, , \quad \forall \, y \in \mathbf{R}^3 \, , \quad 1 \leq j \leq NN \, ,$$

et

$$(2.22) \qquad \frac{\partial V_h^j}{\partial n_h}(y)\Big|_{\text{int } \Gamma_h} = \frac{q_h^j(y)}{2} + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_h} q_h^j(x) \, \frac{\partial}{\partial n_{hy}} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) d\Gamma_h(x) \, ,$$

où q_h^j est la charge du potentiel V_h^j .

Les coefficients a_{ij}^h ont alors la forme

$$(2.23) \qquad a_{ij}^h = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_h} q_h^j(x)\nu_h^i(x)\,\Gamma_h(x) + \frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_h}\int_{\Gamma_h} \nu_h^i(x) q_h^j(y) \frac{\partial}{\partial n_{hx}}\left(\frac{1}{|x-y|}\right) d\Gamma_h(x)\, d\Gamma_h(y)$$

On intègre alors numériquement ces deux termes : la première intégrale s'approxime numériquement sans problème ; dans la double intégrale, on intègre d'abord analytiquement par rapport à x, et ensuite numériquement la fonction de y ainsi obtenue. Ceci donne une meilleure précision que (2.20).

Résolution de (2.19)

Si au lieu de (2.19), on s'intéressait à

$$(2.24) \qquad \begin{cases} -\Delta V_h^i = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_h,\ (\overline{\Omega}_h)^c\ ; \\ V_h^i|_{\Gamma_h \text{ int}} = V_h^i|_{\Gamma_h \text{ ext}} = \nu_h^i\ , \end{cases}$$

la restriction de toute solution de (2.24) serait évidemment solution de (2.19). Puisque $\nu_h^i \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_h)$, alors (2.24) a une solution unique dans $H^1(\Omega_h) \times W_0^1(\overline{\Omega}_h^c)$ (Cf. [30]). Par la même référence, nous savons que (2.24) est équivalent à

$$(2.25) \qquad \begin{cases} \text{trouver} \quad q_h^i \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_h) \quad \text{telle que} \\ \nu_h^i(y) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_h} \frac{q_h^i(x)}{|x-y|}\, d\Gamma_h(x)\ ,\ \forall\ y \in \Gamma_h\ . \end{cases}$$

De plus, ce problème admet la formulation variationnelle suivante

$$(2.26) \qquad \begin{cases} \text{trouver} \quad q_h^i \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_h) \quad \text{telle que} \\ < \nu_h^i, q_h > = \frac{1}{4}\int_{\Gamma_h}\int_{\Gamma_h} \frac{q_h^i(x) q_h(y)}{|x-y|}\, d\Gamma_h(x)\, d\Gamma_h(y),\ \forall\ q_h \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_h). \end{cases}$$

Dans [30], on montre que ce problème est coercif et admet une solution unique.

Pour résoudre (2.26), nous procédons comme dans [9] : soit

$$W_h = \left\{ q_h \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_h) \quad \text{tq} \quad q_h|_{T_{h,\ell}} = \text{constante},\ \forall\ T_{h,\ell} \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

Les éléments $\{w_i\}_{1\leq i\leq NQ}$ de W_h tels que $w_i|_{T_{h,\ell}} = \delta_{i\ell}$, $1\leq i,\ell\leq NQ$ constituent une base de ces sous-espaces de $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_h)$. Si dans (2.26) on remplace alors $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_h)$ par W_h, en notant $\pi_0\, q_h \in W_h$ l'interpolée P_0 de q_h^i, on a

$$(2.26)'\quad \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \pi_0\, q_h^i = \displaystyle\sum_{j=1}^{NQ} q_{hj}^i\, w_j \text{ tel que} \\ < \nu_h^i, w_\ell > = \dfrac{1}{4\pi} \displaystyle\int_{\Gamma_h}\int_{\Gamma_h} \frac{w_\ell\ \pi_0\ q_h^i}{|x-y|}\, d\Gamma_h(x)\, d\Gamma_h(y) \\ \qquad = \dfrac{1}{4\pi} \displaystyle\sum_{\ell,j=1}^{NQ} q_{hj}^i \int_{T_{h\ell}}\int_{T_{hj}} \frac{d\Gamma_h(x)\, d\Gamma_h(y)}{|x-y|}\ ,\ 1\leq \ell\leq NQ \end{array} \right.$$

Ceci est une équation matricielle

$$(2.27)\qquad \tilde{A}_h \cdot Q_h^i = \tilde{B}_h^i\ .$$

$\tilde{A}_h = (\tilde{a}_{k\ell}^h)_{1\leq k,\ell\leq NQ}$ symétrique, définie positive,

avec

$$(2.27)'\qquad \tilde{a}_{k\ell}^h = \int_{T_{hk}}\int_{T_{h\ell}} \frac{d\Gamma_h(x)\, d\Gamma_h(y)}{|x-y|}\ ;$$

$$\tilde{B}_h^i = \left| \begin{array}{c} b_{h\ell}^i \\ \vdots^i \\ b_{hNQ}^i \end{array} \right. \quad \text{avec } b_{hk}^i = \int_{T_{hk}} \nu_h^i\ ,\ 1\leq k\leq NQ\ ,$$

et

$$Q_h^i = \left| \begin{array}{c} q_h^i \\ \vdots^i \\ q_{hNQ}^i \end{array} \right. \quad \text{avec } q_{hk}^i = \pi_0\, q_h^i|_{T_{hk}}\ ,\ 1\leq k\leq NQ\ (q_{hk}^i = \text{constante}).$$

On peut considérer (2.27) comme la résolution de NN équations matricielles avec la même matrice $\tilde{A}_h$

$$(2.27)\qquad \text{résoudre } \tilde{A}_h \cdot Q_h^i = \tilde{B}_h^i \text{ pour } 1\leq i\leq NN\ .$$

La méthode de Cholesky permet de décomposer $\tilde{A}_h$: $\tilde{A}_h = L_h \cdot L_h^t$, où L_h est une matrice triangulaire, inférieure, inversible. On peut alors résoudre les NN équations (2.27) simultanément. Cette résolution achevée, la solution approchée de (2.25) est

$$(2.28) \qquad \pi^* \nu_h^i(y) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_h} \frac{\pi_0 \, q_h^i(x)}{|x-y|} \, d\Gamma_h(x) \quad , \forall \, y \in \Gamma_h \, .$$

Une expression approchée de (2.21) est alors

$$(2.28)' \qquad \pi^* V_h^i(y) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_h} \frac{\pi_0 \, q_h^i(x)}{|x-y|} \, d\Gamma_h(x) \quad , \forall \, y \in \mathbf{R}^3$$

(qui n'est autre que $\gamma_{0h}^{-1}(\pi^* \nu_h^i)$).

En remplaçant $\frac{\partial V_h^j}{\partial n_h}$ dans (2.12) par $\frac{\partial \pi^* V_h^j}{\partial n_h}$, on obtient une valeur approchée de a_{ij}^h qui est la même que celle qu'on obtiendrait en remplaçant q_h^j par $\pi_0 \, q_h^j$ dans (2.23). Pour préserver le caractère symétrique de $A_h = (a_{ij}^h)_{1 \leqslant i,j \leqslant NN}$, on pourrait remplacer ν_h^i dans (2.23) par $\pi^* \nu_h^i$ (2.28), mais ceci sera presque sans effet si h est assez petit.

REMARQUE 2.1 : Afin de calculer (2.27)', on intègre d'abord analytiquement par rapport à x, d'où une fonction

$$(2.29) \qquad V_h^\ell(y) = \int_{T_{h\ell}} \frac{d\Gamma_h(x)}{|x-y|} \quad ,$$

et on obtient une valeur approchée de $\tilde{a}_{k\ell}^h$ en intégrant numériquement $V_h^\ell(y)$ sur T_{hk}.

Calcul des a_{ij}^h

(2.28)' implique que

$$\frac{\partial \pi^* V_h^i}{\partial n_h}(y)\Big|_{\Gamma_h \text{ int}} = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{NQ} \pi_0 \, q_h^i|_{T_{hk}} \frac{\partial V_h^k}{\partial n_h}(y)\Big|_{\text{int } \Gamma_h} \quad , \forall \, y \in \Gamma_h \, .$$

Pour obtenir a_{ij}^h par (2.20), il suffira de calculer $\frac{\partial V_h^k}{\partial n_h}\Big|_{\text{int } \Gamma_h}(b_m^\ell)$, $(b_m^\ell)_{1 \leqslant m \leqslant ID}$ étant les noeuds d'intégration sur $T_{h\ell}$.

Par contre, à partir de (2.23), on a

$$(2.30) \qquad a_{ij}^h = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{NQ} \pi_0 \, q_h^j|_{T_{hk}} \int_{T_{hk}} \nu_h^i(x) d\Gamma_h(x) + \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{NQ} \pi_0 \, q_h^j|_{T_{hk}} \sum_{\ell=1}^{NQ} \int_{T_{hk}} W_{hi}^k(x) d\Gamma_h(

où

$$(2.31)\qquad W_{h,i}^{k}(y) = \int_{T_{hk}} v_h^i(x)\, \frac{\partial}{\partial n_h}(x)\Big|_{\text{int }\Gamma_h} \left(\frac{1}{|x-y|}\right) d\Gamma_h(x) \ .$$

$\int_{T_{hk}} v_h^i(x)\, d\Gamma_h(x)$ se calcule exactement.

$$\int_{T_h} W_{h,i}^{k}(x)\, d\Gamma_h(x) \simeq S(T_{h\ell}) \sum_{m=1}^{ID} w_m\, W_{h,i}^{k}(b_m^{\ell}).$$

Finalement, tout se ramène à déterminer une expression analytique de $V_h^{\ell}(y)$, $\forall\, y \in \mathbf{R}^3$, $1 \leqslant \ell \leqslant NQ$ quelconque fixé, ainsi qu'une expression de son gradient et une expression analytique de $W_{h,i}^{k}(y)$, $\forall\, y \in \mathbf{R}^3$, $1 \leqslant k \leqslant NQ$ fixé, $1 \leqslant i \leqslant NN$ fixé.

Ces calculs, essentiellement techniques, sont regroupés en appendice.

REMARQUE 2.2 : Nous verrons que dans l'intégration (2.29) qui donne $V_h^{\ell}(y)$, $y \in \mathbf{R}^3$, la méthode employée est valable si $T_{h\ell}$ est un polygone. Dans les essais numériques, on prendra pour $T_{h\ell}$ des quadrilatères autant que possible (l'ensemble des éléments constituant toujours une triangulation de Γ_h), ce qui permettra des économies de temps calcul et de place mémoire, sans réduire la précision des résultats.

Définition de (P_h^3)

La fonctionnelle $\overline{J}_h$ est définie dans II.1 par

$$(2.2)\qquad \overline{J}_h : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_h) \to \mathbf{R}$$

$$v_h \to \frac{1}{2}\, \overline{a}_h(v_h, v_h) - (v_h, g\circ\psi)_{L^2(\Gamma_h)} \ ,$$

où

$$\overline{a}_h : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_h) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_h) \to \mathbf{R} \quad \text{symétrique, positive ,}$$

$$(u_h\ ,\ v_h) \to \overline{a}_h(u_h, v_h) = \int_{\Gamma_h} v_h\, \frac{\partial}{\partial n_h}\, (\gamma_{0h}^{-1}\, u_h) \ ;$$

et l'on obtenait le problème (2.18) en remplaçant $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_h)$ par V_h dans (2.5).

Nous venons de voir que l'on ne peut déterminer exactement les éléments $v_h^i \in \mathcal{H}(\Omega_h)$ vérifiant (2.9) (i.e. solution de (2.19)). On est donc amené à introduire

$$(2.32) \qquad V_h^* = \left\{\text{s.e. réel de } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_h) \text{ engendré par } \{\pi^* v_h^i\}_{1\leqslant i\leqslant NN}\right\} .$$

L'application

$$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_h) \to V_h^*$$
$$v_h \to \pi^* v_h = \sum_{i=1}^{NN} v_h(a_i)\, \pi^* v_h^i \ , \ (a_i)_{1\leqslant i\leqslant NN} = \text{noeuds de } \Gamma_h \ ,$$

étant bien définie, il en sera de même de

$$(2.33) \qquad \bar{a}_{hh} : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_h) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_h) \to \mathbb{R}$$
$$(u_h \ , \ v_h) \to \bar{a}_{hh}(u_h, v_h) = \bar{a}_h(\pi^* u_h, \pi^* v_h) \ .$$

L'expression $\bar{J}_h$ se modifie donc en remplaçant $\bar{a}_h$ par $\bar{a}_{hh}$ dans (2.2). Soit

$$(2.34) \qquad K_h^* = \left\{\pi^* v_h = \sum_{i=1}^{NN} \lambda_i\, \pi^* v_h^i \ , \ \lambda_i \geqslant u_0(a_i)\right\}.$$

En remplaçant V_h par V_h^* et K_h par K_h^*, (2.18) se modifie en

$$(2.35) \qquad \begin{cases} \text{trouver } \pi^* u_h \in K_h^* \text{ tel que} \\ \bar{J}_h(\pi^* u_h) = \underset{\pi^* v_h \in K_h^*}{\text{Min}} \ \bar{J}_h(\pi^* v_h) \ . \end{cases}$$

Pour être complet, il faudrait tenir compte dans (2.33) de l'intégration numérique. L'erreur ainsi introduite est de même nature que dans le cas des équations. Nous renvoyons à [8], [33], par exemple.

L'existence et l'unicité de la solution $\pi^* u_h$ de (2.35) résulte de la même condition que dans le problème continu, condition qui sera remplie pour h assez petit.

II.4 - CONVERGENCE DE LA METHODE

Nous savons que la solution u de

$$(1.29)\qquad \begin{cases} u \in K' = \left\{ v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \ ; \ v \geqslant u_0 \right\} \\ \overline{a}(u, v-u) \geqslant (v-u, g)_{L^2(\Gamma)}, \forall\, v \in K' \end{cases}$$

peut s'écrire $u = \tilde{u} + u_0$ où $\tilde{u}$ est la solution de

$$(1.30)'\qquad \begin{cases} \tilde{u} \in K_0' = \left\{ v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \ ; \ v \geqslant 0 \right\} \\ \overline{a}(\tilde{u}, v-\tilde{u}) \geqslant (v-\tilde{u}, \tilde{g})_{L^2(\Gamma)}, \forall\, v \in K_0' \ . \end{cases}$$

Etudier la convergence de $\pi^* u_h$, solution de (2.24), vers u , revient alors à étudier la convergence de la trace $\pi^* u_0$ de la solution approchée de

$$(2.36)\qquad \begin{cases} -\Delta u_0 = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \ , \\ u_0|_\Gamma = u_0 \ , \end{cases}$$

calculée par la technique utilisée dans II.3, vers u_0 , et la convergence de $\pi^* \tilde{u}_h$ vers $\tilde{u}$, $\pi^* \tilde{u}_h$ solution de (2.35), avec $\tilde{g}$ au lieu de g et

$$K_{0h}^* = \left\{ \pi^* v_h = \sum_{i=1}^{NN} \lambda_i \, \pi^* v_h^i \ , \ \lambda_i \geqslant 0 \right\}$$

au lieu de K_h^* .

Nous avons le résultat suivant pour

$$K_0 = \left\{ v \in H^1(\Omega) \ ; \ v|_\Gamma \geqslant 0 \right\} \ ;$$

LEMME 2.1 : $C^\infty(\overline{\Omega}) \cap K_0$ *est dense dans* K_0 *pour la norme de* $H^1(\Omega)$.

Démonstration : Cf. [18] (vol. 1). Soit

$$v \in \tilde{K}_0 = \left\{ v \in \mathcal{H}(\Omega) \ ; \ v|_\Gamma \geqslant 0 \right\} \subset K_0 \quad \text{et} \quad v^n \in C^\infty(\overline{\Omega}) \cap K_0$$

tels que

$$\| v - v^n \|_{H^1(\Omega)} \underset{n \to +\infty}{\to} 0 \ .$$

Puisque $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est continue, alors

$$\|\gamma_0 v - \gamma_0 v^n\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leqslant c \|v - v^n\|_{H^1(\Omega)} \underset{n \to +\infty}{\to} 0 \ ;$$

puisque $\gamma_0 : \mathcal{H}(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est un homéomorphisme,

$$\forall v \in K_0' = \left\{ v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \ ; \ v \geqslant 0 \right\} ,$$

il existe $v^n \in \gamma_0(C^\infty(\bar{\Omega}) \cap K_0)$ tel que

$$\|v - v^n\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \underset{n \to +\infty}{\to} 0 \ .$$

Il suffit de prendre $v^n = \gamma_0 v^n$, où $v^n \in C^\infty(\bar{\Omega}) \cap K_0$ et $\|v^n - \gamma_0^{-1} v\| \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ en remarquant que $\gamma_0^{-1}(K_0') = \tilde{K}_0$.

En conclusion,

LEMME 2.2 : $\gamma_0(C^\infty(\bar{\Omega}) \cap K_0)$ *est dense dans* K_0' *pour la norme habituelle de* $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Dans la suite, nous supposerons que $\Omega \equiv \Omega_h$. Alors V_h et V_h^* sont inclus dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, et de même, K_{0h} est inclus dans K_0' . Cependant, $K_{0h}^* \not\subset K_0'$. Nous avons le résultat suivant (Cf. [30]) : si q_0 (resp. $\pi^* q_0$) est la charge de u_0 (resp. $\pi^* u_0$), alors

$$\begin{aligned} \|u_0 - \pi^* u_0\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} &\leqslant c \|q_0 - \pi^* q_0\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \\ &\leqslant c \ h^{\frac{3}{2}} \|u_0\|_{H^2(\Gamma)} \ . \end{aligned} \tag{2.37}$$

Nous allons établir maintenant les résultats suivants :

LEMME 2.3 :

i) tout élément de $\gamma_0(C^\infty(\bar{\Omega}) \cap K_0)$ *est limite d'éléments de* K_{0h}^* *dans* $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *fort ; il en est de même de tout élément de* K_0' *par densité ;*

ii) la limite faible de toute suite de K_{0h}^* *est dans* K_0' .

(il s'agit de passer à la limite quand $h \to 0$).

Démonstration : On montre d'abord

ii) soit $\pi^* \nu \in K^*_{0h}$ et $\pi^* \nu \to \nu$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ faible ; donc $\pi^* \nu \to \nu$ dans $L^2(\Gamma)$ fort.

$$\pi^* \nu = \sum_{i=1}^{NN} \lambda_i \pi^* \nu_h^i \ , \ \lambda_i \geqslant 0 \ .$$

De (2.26)', on déduit que

$$\int_{T_{h\ell}} \nu_h^i = \int_{T_{h\ell}} \pi^* \nu_h^i \ , \ \forall \ T_{h\ell} \in T_h .$$

Puisque $\nu_h^i \geqslant 0$ par construction, il s'ensuit que

$$\int_{T_{h\ell}} \pi^* \nu_h^i \geqslant 0 \ , \ \forall \ T_{h\ell} .$$

Par conséquent,

$$\int_{\Gamma} \pi^* \nu \geqslant 0 \ ,$$

ce qui reste vrai sur toute partie de $\Gamma_0 \subset \Gamma$, $\Gamma_0 = \bigcup_{\ell \in I} T_{h\ell}$ (*). Supposons qu'il existe $\Gamma_0 \subset \Gamma$, $\mu(\Gamma_0) \neq 0$ et $\nu|_{\Gamma_0} < 0$. Puisque $L^2(\Gamma) \subset L^1(\Gamma)$, Γ étant de mesure finie, alors

$$\left| \int_{\Gamma_0} \nu - \int_{\Gamma_0} \pi^* \nu \right| \leqslant \int_{\Gamma_0} |\nu - \pi^* \nu| \leqslant \int_{\Gamma} |\nu - \pi^* \nu| \leqslant c \, \| \nu - \pi^* \nu \|_{L^2(\Gamma)} \underset{h \to 0}{\to} 0 \ ,$$

donc, $\forall \ \varepsilon > 0$, pour h assez petit, on a

$$- \varepsilon + \int_{\Gamma_0} \nu \leqslant \int_{\Gamma_0} \pi^* \nu \leqslant \int_{\Gamma_0} \nu + \varepsilon \ .$$

Pour ε assez petit, on aura

$$\int_{\Gamma_0} \nu + \varepsilon < 0 \ ,$$

ce qui implique que

$$\int_{\Gamma_0} \pi^* \nu < 0 \ ,$$

ce qui contredit (*). Donc $\nu \geqslant 0$ pp sur Γ , c.à.d. que $\nu \in K_0'$.

i) $\nu \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$; soit $\nu^n \in \gamma_0(C^\infty(\overline{\Omega}) \cap K_0)$ tel que $\|\nu - \nu^n\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$;

soit $\pi^* \nu^n \in K_{0h}^*$ donné par

$$\pi^* \nu^n = \sum_{i=1}^{NN} \nu^n(a_i)\, \pi^* \nu_h^i \,, \quad (a_i)_{1 \leq i \leq NN} = \text{noeuds de la triangulation .}$$

Pour $y \in \Gamma$,

$$\pi^* \nu^n(y) = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \frac{\sum_{i=1}^{NN} \nu^n(a_i)\, \pi_0\, q_h^i(x)}{|x - y|}\, d\Gamma(x) = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \frac{q_n^h(x)}{|x-y|}\, d\Gamma(x) \,,$$

où on aura posé

$$q_n^h(x) = \sum_{i=1}^{NN} \nu^n(a_i)\, \pi_0\, q_h^i(x) \,, \quad \forall\, x \in \Gamma \,.$$

Si q_n est la charge de ν^n , c.à.d. si

$$\nu^n(y) = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \frac{q_n(x)}{|x-y|}\, d\Gamma(x) \,, \quad \forall\, y \in \Gamma \,,$$

alors

$$\|\nu^n - \pi^* \nu^n\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq c\, \|q_n - q_n^h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \tag{2.38}$$

De (2.26)', on déduit que q_n^h est la solution de

$$\begin{cases} q_n^h \in W_h \,, \\ < \sum_{i=1}^{NN} \nu^n(a_i)\, \nu_h^i, W_\ell > = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{W_\ell(y)\, q_n^h}{|x - y|}\, d\Gamma(x)\, d\Gamma(y), \quad 1 \leq \ell \leq NQ \,. \end{cases} \tag{2.39}$$

Si $\pi_0\, q_n$ est l'approximation de q_n dans W_h , $\pi_0\, q_n$ est solution de

$$\begin{cases} \pi_0\, q_n \in W_h \,, \\ < \nu^n, W_\ell > = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{W_\ell(y)\, \pi_0\, q_n(x)}{|x - y|}\, d\Gamma(x)\, d\Gamma(y), \quad 1 \leq \ell \leq NQ \,. \end{cases} \tag{2.40}$$

Dans (2.39),

$$< \sum_{i=1}^{NN} \nu^n(a_i)\, \nu_h^i, W_\ell > = \sum_{i=1}^{NN} \nu^n(a_i) < \nu_h^i, W_\ell > = \sum_{i=1}^{NN} \nu^n(a_i) \int_{T_{h\ell}} \nu_h^i(x)\, d\Gamma(x)$$

et $\int_{T_{h\ell}} \nu_h^i(x)\, d\Gamma(x)$ se calcule exactement.

Si dans (2.40) on calcule

$$< \nu^n, W_\ell > = \int_{T_{h\ell}} \nu^n(x)\, d\Gamma(x)$$

en utilisant sur chaque triangle $T_{h\ell}$ l'interpolée $\mathbf{P}_1$ de ν^n, on aura

$$< \nu^n, W_\ell > \simeq \sum_{i=1}^{NN} \nu^n(a_i) \int_{T_{h\ell}} \nu_h^i(x)\, d\Gamma(x) .$$

q_n^h et $\pi_0\, q_n$ sont donc solution de la même équation ; l'unicité de la solution implique que $q_n^h = \pi_0\, q_n$.

De [30], on déduit la majoration suivante de $\| q_n - \pi_0\, q_n \|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}$:

$$\| q_n - \pi_0 q_n \|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leqslant c \left\{ \| \nu^n - \pi_h \nu^n \|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + c'\, h^{\frac{3}{2}} \| q_n \|_{H^1(\Gamma)} \right\} . \tag{2.41}$$

$\pi_h \nu^n$ étant l'interpolée d'ordre 1 de ν^n, et puisque

$$H^s(\Gamma) \to H^{s+1}(\Gamma)$$

$$q \to \nu(y) = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \frac{q(x)}{|x-y|}\, d\Gamma(x) \tag{2.42}$$

est un isomorphisme, alors

$$\| q_n - \pi_0\, q_n \|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leqslant c\, h^{\frac{3}{2}} \| \nu^n \|_{H^2(\Gamma)} , \tag{2.43}$$

c désignant des constantes diverses ind. de h et de n .

Puisque $\nu^n \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $\| \nu^n \|_{H^2(\Gamma)}$ est finie. De (2.38), on déduit que

$$\| \nu^n - \pi^* \nu^n \|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \underset{h \to 0}{\to} 0 ,$$

donc

$$\| \nu^n - \pi^* \nu^n \|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leqslant \| \nu - \nu^n \|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \| \nu^n - \pi^* \nu^n \|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \to 0 , \tag{2.44}$$

en faisant tendre successivement n vers $+\infty$ et h vers 0 . Ceci termine la démonstration du Lemme. ■

Etant donné que $\Omega \equiv \Omega_h$, (2.33) implique que

$$\overline{a}_{hh}(u_h, v_h) = \overline{a}(\pi^* u_h, \pi^* v_h)$$

et

$$\overline{J}_h(\nu_h) = \frac{1}{2}\,\overline{a}(\pi^*\,\nu_h,\pi^*\,\nu_h) - (\pi^*\,\nu_h,\tilde{g}) = \overline{J}(\pi^*\,\nu_h)\ ,$$

soit

$$\pi^*\,\nu \in K^*_{0h} \quad \text{tel que} \quad \|\pi^*\,\nu - \tilde{u}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \underset{h\to 0}{\to} 0\ .$$

$\overline{J}$ étant continue, pour tout $\varepsilon > 0$, si h est assez petit, on a

$$\overline{J}(\pi^*\,\nu) - \varepsilon \leqslant \overline{J}(\tilde{u})\ .$$

$\pi^*\,\tilde{u}_h$ étant le minimum de $\overline{J}$ sur K^*_{0h}, on aura

$$\overline{J}(\pi^*\tilde{u}_h) - \varepsilon \leqslant \overline{J}(\tilde{u}).$$

Puisque $\overline{J}$ est coercive, $\pi^*\,\tilde{u}_h$ est borné indépendamment de h. On peut donc extraire une sous-suite, encore notée $\pi^*\,\tilde{u}_h$, qui converge faiblement dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ vers un certain $\tilde{u}^* \in K'_0$.

Par ailleurs, $\pi^*\,\tilde{u}_h$ se caractérise par

$$\overline{a}(\pi^*\,\tilde{u}_h,\pi^*\,\tilde{u}_h) \leqslant \overline{a}(\pi^*\,\tilde{u}_h,\pi^*\,\nu_h) - \langle \pi^*\,\nu_h - \pi^*\,\tilde{u}_h,\tilde{g}\rangle\ ,\ \forall\ \pi^*\nu_h \in K^*_{0h}\ .$$

Si $\pi^*\,\nu_h$ converge vers $\nu \in K'_0$ (faiblement), alors

$$\liminf_{h\to 0}\ \overline{a}(\pi^*\,\tilde{u}_h,\pi^*\,\tilde{u}_h) \leqslant \overline{a}(\tilde{u}^*,\nu) - \langle \nu - \tilde{u}^*,\tilde{g}\rangle\ .$$

$\overline{a}$ étant s.c.i., il est bien connu que

$$\overline{a}(\tilde{u}^*,\tilde{u}^*) \leqslant \liminf_{h\to 0}\ \overline{a}(\pi^*\,\tilde{u}_h,\pi^*\,\tilde{u}_h)\ .$$

Par conséquent

$$\overline{a}(\tilde{u}^*,\tilde{u}^*) \leqslant \overline{a}(\tilde{u}^*,\nu) - \langle \nu - \tilde{u}^*,\tilde{g}\rangle\ ,\ \forall\ \nu \in K'_0\ .$$

L'unicité de la solution de cette inéquation implique que $\tilde{u} = \tilde{u}^*$.

En résumé,

THEOREME 2.1 : Si $\tilde{u}$ est la solution de (1.30)' et $\pi^*\,\tilde{u}_h$ celle de (2.24) avec K^*_{0h}, alors $\pi^*\,\tilde{u}_h \to \tilde{u}$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ faible.

En utilisant la caractérisation de $\pi^* u_h$ et en passant à la limite supérieure quand $h \to 0$, on obtient (en notant $\underline{u}$ la classe d'équivalence de u sur $H^1(\Omega)/_{\mathbb{R}}$)

$$\| \underline{(\gamma_0^{-1} \tilde{u})} - \underline{(\gamma_0^{-1} \pi^* \tilde{u}_h)} \|_{H^1(\Omega)/_{\mathbb{R}}} \underset{h \to 0}{\to} 0 .$$

A P P E N D I C E (1)

Calcul de $V_h(P) = \int_{Q_{h\ell}} \frac{d\Gamma_h(x)}{|x-P|}$, $P \in \mathbf{R}^3$, et de son gradient en P .

Soit $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ le repère fixe de $\mathbf{R}^3$ où Ω a été défini ; soient P un point quelconque fixe de $\mathbf{R}^3$, de coordonnées (x,y,z) dans ce repère, et $Q_{h\ell}$ un quadrilatère plan de $\mathbf{R}^3$, de sommets Q_1 , Q_2 , Q_3 , Q_4 (le cas $Q_{h\ell}$ = triangle est déductible de ce qui suit en faisant $Q_4 \equiv Q_1$).

Soit O' un point du plan de $Q_{h\ell}$, de coordonnées (x_0,y_0,z_0) dans le repère fixe. On note $(O',\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$ le repère local tel que $Q_{h\ell}$ soit contenu dans le plan $(O',\vec{i}',\vec{j}')$ déduit du repère fixe par une translation et une rotation.

Sans altérer la généralité des calculs, on suppose que $\vec{k}'$ est la normale extérieure à Γ_h restreinte à $Q_{h\ell}$, que $\vec{i}'$ est parallèle à $\vec{Q_1Q_3}$ et que les sommets de $Q_{h\ell}$ sont numérotés dans le sens indirect (Cf. Fig. 1).

Soient (ξ,η,ν) le système de coordonnées locales et $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ les coordonnées de P dans le repère local ; $X = (\xi,\eta,0)$ désignera un point quelconque du plan $(O',\vec{i}',\vec{j}')$; on note $P_0 = (\bar{x},\bar{y},0)$ la projection de P sur ce plan.

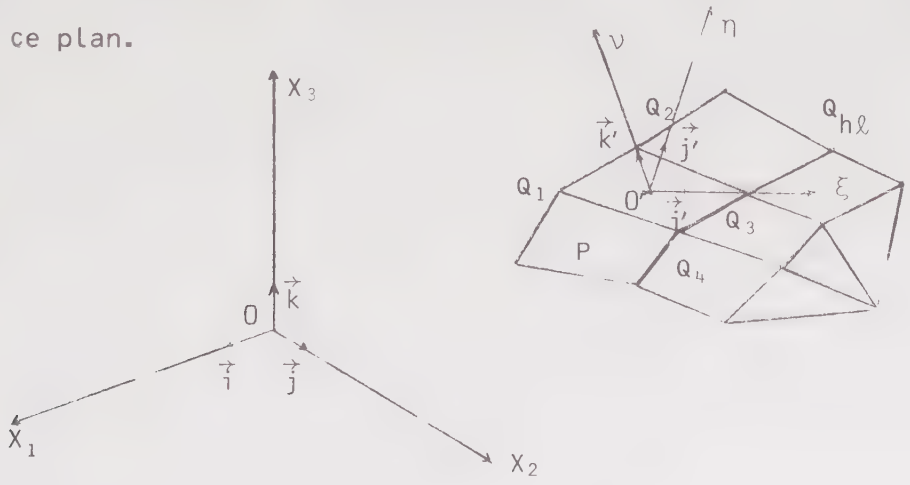


Figure 1

$(Q_j)_{1\leqslant j\leqslant 4}$ représente les sommets de $Q_{h\ell}$ et $\theta_j = (-\vec{i}', \vec{P_0Q_j})$, l'angle des deux directions.

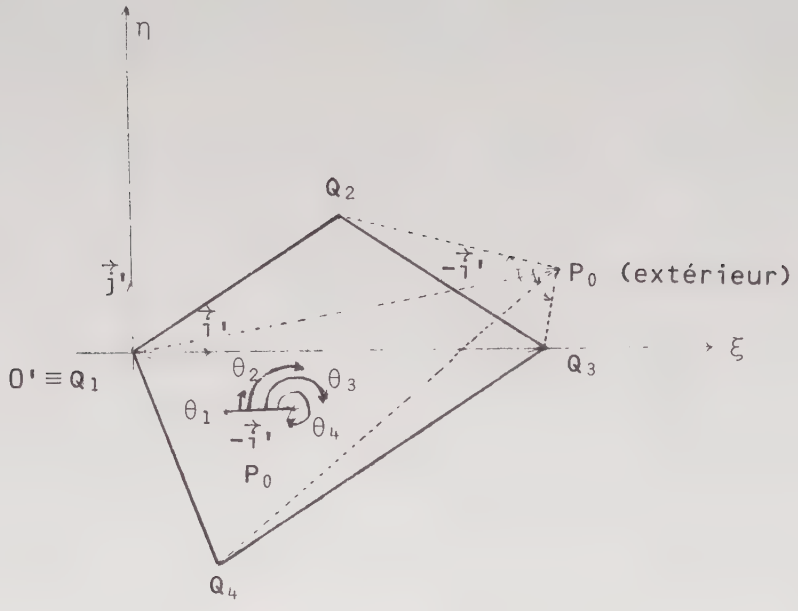


Figure 2

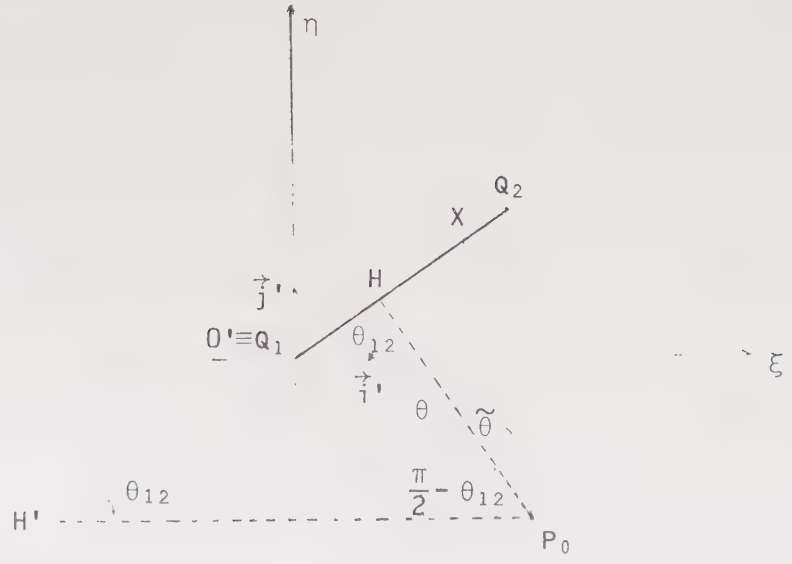


Figure 3

$$r = |P.X| = \sqrt{(\bar{x}-\xi)^2+(\bar{y}-\eta)^2+\bar{z}^2} \quad \text{et} \quad \vec{r} = \vec{PX} \ ;$$

$$\rho = |P_0.X| = \sqrt{(\bar{x}-\xi)^2+(\bar{y}-\eta)^2} .$$

Alors

$$V_h^{\ell}(P) = \int_{Q_{h\ell}} \frac{d\Gamma_h(X)}{|X-P|} = \int_{Q_{h\ell}} \frac{d\xi \ d\eta}{\sqrt{(\xi-\bar{x})^2+(\eta-\bar{y})^2+\bar{z}^2}}$$

c.à.d.

$$(A1.1) \qquad V_h^{\ell}(P) = \int_{Q_{h\ell}} \frac{d\xi \ d\eta}{\sqrt{\rho^2+\bar{z}^2}} .$$

Pour $X = (\xi,\eta,0)$ appartenant au plan $(O',\vec{i}',\vec{j}')$, si $\theta = (-\vec{i}',\vec{P_0X})$ est l'angle de ces deux vecteurs, comme $\rho = |P_0-X| = \sqrt{(\bar{x}-\xi)^2+(\bar{y}-\eta)^2}$, alors

$$\xi - \bar{x} = \rho \cos\theta \ ,$$

$$\eta - \bar{y} = \rho \sin\theta \ .$$

En procédant dans l'intégrale au changement de variable $(\xi,\eta) \to (\rho,\theta)$, on obtient

$$d\xi \ d\eta = \rho \ d\rho \ d\theta$$

et

$$V_h^{\ell}(P) = \int_{Q_{h\ell}} \frac{d\xi \ d\eta}{\sqrt{\rho^2+\bar{z}^2}} = \int_{Q_{h\ell}} \frac{d\rho \ d\theta}{\sqrt{\rho^2+\bar{z}^2}}$$

qui implique

$$(A1.2) \qquad V_h^{\ell}(P) = \int_{Q_{h\ell}} \frac{d}{d\rho}\left(\sqrt{\rho^2+\bar{z}^2}\right) d\rho \ d\theta .$$

Détermination des bornes de variation de ρ et θ :

i) Si P_0 est intérieur à $Q_{h\ell}$, l'intégrale sur $Q_{h\ell}$ est égale à la somme des intégrales sur les triangles $P_0Q_1Q_2$, $P_0Q_2Q_3$, $P_0Q_3Q_4$, $P_0Q_4Q_1$. Pour un tel triangle $P_0Q_kQ_{\ell}$ ($\ell = k+1$ si $k<4$, $\ell = 1$ sinon), θ varie de θ_k à θ_{k+1} si $k < 4$, ou de θ_4 à $\theta_1+2\pi$ si $k = 4$. Par ailleurs, pour θ fixé,

ρ varie de 0 à $R = |P_0 - X_\theta|$, où X_θ est le point de $Q_k Q_\ell$ tel que $(-\vec{i}', P_0\vec{X}_\theta) = \theta$.

ii) Ces résultats sont encore vrais si P_0 est extérieur à $Q_{h\ell}$: les intégrales sur les parties de $P_0Q_kQ_\ell$ extérieures à $Q_{h\ell}$ s'annulent, θ variant dans le même intervalle une fois dans les deux sens (Cf. Fig. 2).

$$V_h^\ell(P) = \int_{Q_{h\ell}} \frac{d}{d\rho}\left(\sqrt{\rho^2+\overline{z}^2}\right) d\rho\, d\theta = \sum_{k,\ell} \int_{P_0Q_kQ_\ell} \frac{d}{d\rho}\left(\sqrt{\rho^2+\overline{z}^2}\right) d\rho\, d\theta$$

avec $1 \leqslant k,\ell \leqslant 4$ et la convention ci-dessus. Donc

$$V_h^\ell(P) = \sum_{k,\ell} \int_{\theta_k,\theta_\ell} d\theta \int_0^R \frac{d}{d\rho}\left(\sqrt{\rho^2+\overline{z}^2}\right) d\rho$$

$$= \sum_{k,\ell} \int_{\theta_k,\theta_\ell} \left[\sqrt{R^2+\overline{z}^2} - |\overline{z}|\right] d\theta ,$$

c.à.d.

$$V_h^\ell(P) = \sum_{k,\ell} \int_{\theta_k,\theta_\ell} \sqrt{R^2+\overline{z}^2}\; d\theta - |\overline{z}|\,\Delta\theta$$

avec

$\Delta\theta = 2\pi$ si P_0 est à l'intérieur de $Q_{h\ell}$;

$\Delta\theta = 0$ si P_0 est à l'extérieur de $Q_{h\ell}$.

En notant

(A1.3) $$\varphi_{k\ell} = \int_{\theta_k,\theta_\ell} \sqrt{R^2+\overline{z}^2}\; d\theta$$

on a

(A1.4) $$V_h^\ell(P) = \varphi_{12} + \varphi_{23} + \varphi_{34} + \varphi_{41} - \Delta\theta\,|\overline{z}| .$$

Les $\varphi_{k\ell}$ se calculant de la même façon, il suffit de le faire pour φ_{12}.

Dans toute la suite, on suppose que $Q_i = (\xi_i, \eta_i, 0)$, $1 \leqslant i \leqslant 4$, dans le repère local.

Calcul de φ_{12}

On le fait en deux étapes.

On transforme d'abord cette intégrale en θ en intégration le long de Q_1Q_2 ; puis, on fait apparaître des expressions classiques de primitives connues.

1) Soient

$$\theta_{12} = (\vec{i}', Q_1\vec{Q}_2)$$

$$d_{12} = |Q_1 - Q_2| = \sqrt{(\xi_1-\xi_2)^2+(\eta_1-\eta_2)^2} \ .$$

Ceci donne

$$\cos\theta_{12} = \frac{\xi_1-\xi_2}{d_{12}} \ , \quad \sin\theta_{12} = \frac{\eta_1-\eta_2}{d_{12}}$$

que l'on notera C_{12} , S_{12} , respectivement.

Soit H la projection de P_0 sur la droite déterminée par Q_1 et Q_2 , et soit H' l'intersection de cette droite avec la parallèle à $\vec{i}'$ en P_0 (Fig. 3). Alors

$$|P_0 - H| = |\overline{P_0H'}.S_{12}|.$$

Or

$$\overline{P_0H'} = \frac{(\bar{x}-\xi_1)S_{12}-(\bar{y}-\eta_1)C_{12}}{S_{12}} \ ;$$

notons

$$R_{12} = \overline{P_0H'}\ S_{12} \ ;$$

alors

(A1.5) $$R_{12} = (\bar{x}-\xi_1)\ S_{12} - (\bar{y}-\eta_1)\ C_{12} \ ,$$

expression algébrique dont la valeur absolue est $|P_0-H|$.

Soit $X = (\xi,\eta,0)$ un point du segment Q_1Q_2 , $\vec{R} = P_0\vec{X}$ et $s_{12} = \vec{R} \cdot \frac{Q_1\vec{Q}_2}{|Q_1Q_2|}$, le produit scalaire ; on a

(A1.6) $$s_{12} = (\xi-\bar{x})\ C_{12} + (\eta-\bar{y})\ S_{12}$$

et la valeur absolue de s_{12} est la distance $|H-X|$.

Pour $X = Q_1$, on note $s_{12} = s_{12}^{(1)}$ et pour $X = Q_2$, $s_{12} = s_{12}^{(2)}$. Soit $\tilde{\theta} = (P_0\vec{H}, P_0\vec{X})$ l'angle de ces directions ; alors

$$\theta = (\vec{i}', P_0\vec{X}) = (\frac{\pi}{2} - \theta_{12}) + \tilde{\theta} \Rightarrow d\theta = d\tilde{\theta} \ ;$$

d'autre part

$$\text{tg } \tilde{\theta} = \frac{s_{12}}{R_{12}} \quad , \text{ donc} \quad d(\text{tg } \tilde{\theta}) = \frac{ds_{12}}{R_{12}}$$

d'où

$$d\tilde{\theta} = \frac{1}{1+(s_{12}/R_{12})^2} \frac{ds_{12}}{R_{12}} = \frac{R_{12}\ ds_{12}}{(R_{12})^2+(s_{12})^2} = \frac{R_{12}}{R^2}\ ds_{12} \ .$$

ds_{12} est l'élément de longueur le long de $Q_1 Q_2$. Dans la suite, on notera s et ds au lieu de s_{12} et ds_{12} respectivement.

2) En revenant à φ_{12} ,

$$\varphi_{12} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{R^2+\bar{z}^2}\ d\theta = R_{12}\int_{s_{12}^{(1)}}^{s_{12}^{(2)}} \frac{\sqrt{R^2+\bar{z}^2}}{R^2}\ ds$$

d'où

$$\varphi_{12} = R_{12}\int_{s_{12}^{(1)}}^{s_{12}^{(2)}} \frac{ds}{\sqrt{R^2+\bar{z}^2}} + R_{12}\int_{s_{12}^{(1)}}^{s_{12}^{(2)}} \frac{\bar{z}^2\ ds}{R^2\sqrt{R^2+\bar{z}^2}} \ .$$

Posons

$$\varphi_{12}^{(1)} = R_{12}\int_{s_{12}^{(1)}}^{s_{12}^{(2)}} \frac{ds}{\sqrt{R^2+\bar{z}^2}} \quad ; \quad \varphi_{12}^{(2)} = R_{12}\int_{s_{12}^{(1)}}^{s_{12}^{(2)}} \frac{\bar{z}^2\ ds}{R^2\sqrt{R^2+\bar{z}^2}} \ ,$$

expressions que nous allons calculer successivement.

i) $$\varphi_{12}^{(1)} = R_{12}\int_{s_{12}^{(1)}}^{s_{12}^{(2)}} \frac{ds}{\sqrt{R^2+\bar{z}^2}} = R_{12}\int_{s_{12}^{(1)}}^{s_{12}^{(2)}} \frac{ds}{\sqrt{s^2+R_{12}^2+\bar{z}^2}} \ ,$$

car $R^2 = R_{12}^2 + s^2$; donc

(A1.7) $$\varphi_{12}^{(1)} = R_{12}\ \text{Log}\ \frac{\sqrt{(s_{12}^{(2)})^2+R_{12}^2+\bar{z}^2} + s_{12}^{(2)}}{\sqrt{(s_{12}^{(1)})^2+R_{12}^2+\bar{z}^2} + s_{12}^{(1)}} \ .$$

En posant $\vec{r}_i = \vec{PQ}_i = \vec{P_0Q}_i - \bar{z}\vec{k}'$, $1 \leqslant i \leqslant 4$, on a

$$r_1^2 = (s_{12}^{(1)})^2 + R_{12}^2 + \bar{z}^2$$

$$r_2^2 = (s_{12}^{(2)})^2 + R_{12}^2 + \bar{z}^2 \ ,$$

d'où

$$\varphi_{12}^{(1)} = R_{12}\ \text{Log}\ \frac{r_2 + s_{12}^{(2)}}{r_1 + s_{12}^{(1)}} \ .$$

Ce logarithme prend des valeurs infinies sur les prolongements du côté Q_1Q_2 .

Après transformation à l'aide des relations entre $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $Q_1\vec{Q}_2$, on obtient

(A1.8) $$\varphi_{12}^{(1)} = R_{12} \text{ Log } \frac{r_1+r_2+d_{12}}{r_1+r_2-d_{12}}$$

où $d_{12} = |Q_1 - Q_2|$; cette expression n'est singulière que sur le segment Q_1Q_2 .

ii) $$\varphi_{12}^{(2)} = R_{12}\int_{s_{12}^{(1)}}^{s_{12}^{(2)}} \frac{\bar{z}^2 \, ds}{R^2\sqrt{R^2+\bar{z}^2}} \quad ;$$

rappelons que $r^2 = R^2 + \bar{z}^2$ où $\vec{r} = \vec{PX}$. Donc

$$\varphi_{12}^{(2)} = R_{12} \, \bar{z}^2 \int_{s_{12}^{(1)}}^{s_{12}^{(2)}} \frac{ds}{r(r^2-\bar{z}^2)} = R_{12} \, \bar{z}^2 \int_{s_{12}^{(1)}}^{s_{12}^{(2)}} \frac{1}{r(r^2-\bar{z}^2)} \, \frac{R_{12}+\bar{z}^2}{R_{12}+\bar{z}^2} \, ds$$

$$= R_{12} \, \bar{z}^2 \int_{s_{12}^{(1)}}^{s_{12}^{(2)}} \frac{r^2 - s^2}{r^2R_{12}^2+\bar{z}^2s^2} \, \frac{ds}{r} = R_{12} \, \bar{z}^2 \int_{s_{12}^{(1)}}^{s_{12}^{(2)}} \frac{r^2 - s^2}{r^2R_{12}^2(1+\frac{\bar{z}^2s^2}{r^2R_{12}^2})} \, \frac{ds}{r}$$

$$= \frac{R_{12}}{R_{12}^2} \, \bar{z}^2 \int_{s_{12}^{(1)}}^{s_{12}^{(2)}} \frac{r^2 - s^2}{r^2(1+\frac{\bar{z}^2s^2}{r^2R_{12}^2})} \, \frac{ds}{r}$$

$$= (\text{sign } R_{12}) \, |\bar{z}| \int_{s_{12}^{(1)}}^{s_{12}^{(2)}} \frac{1}{1+(\frac{\bar{z}}{R_{12}} \, \frac{s}{r})^2} \, |\frac{\bar{z}}{R_{12}}| \, (\frac{1}{r} - \frac{s}{r^2} \, \frac{s}{r}) \, ds \, .$$

Or

$$r^2 = s^2 + R_{12}^2 + \bar{z}^2 \Rightarrow d(\frac{s}{r}) = (\frac{1}{r} - \frac{s}{r^2} \, \frac{s}{r}) \, ds \, .$$

En posant $u = |\frac{\bar{z}}{R_{12}}| \, \frac{s}{r}$, $u_i = |\frac{\bar{z}}{R_{12}}| \, \frac{s_{12}^{(i)}}{r_i}$, $i = 1,2$, on obtient

$$\varphi_{12}^{(2)} = (\text{sign } R_{12}) \, |\bar{z}| \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{1+u^2} = (\text{sign } R_{12}) \, |\bar{z}| \, [\text{arc tg } u_2 - \text{arc tg } u_1]$$

arc tg étant déterminé entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, ou encore

(A1.9) $$\varphi_{12}^{(2)} = |\bar{z}| \text{ arc tg } \left[\frac{R_{12} \, \bar{z}^2 \, (r_1 \, s_{12}^{(2)} - r_2 \, s_{12}^{(1)})}{r_1 \, r_2 \, R_{12}^2 + \bar{z}^2 \, s_{12}^{(1)} \, s_{12}^{(2)}}\right],$$

arc tg étant évalué cette fois-ci entre $-\pi$ et π .

En résumé, $1 \leq k,\ell \leq 4$, $\ell = k+1$, si $k < 4$, $\ell = 1$, si $k = 4$. En déduisant $R_{k\ell}$ de R_{12} , $s_{k\ell}^{(k)}$ de $s_{12}^{(1)}$, $s_{k\ell}^{(\ell)}$ de $s_{12}^{(2)}$ par permutation circulaire, et en notant

$$Q_{k\ell} = \text{Log}\ \frac{r_k + r_\ell + d_{k\ell}}{r_k + r_\ell - d_{k\ell}}\ ,$$

$$J_{k\ell} = \text{arc tg}\left[\frac{R_{k\ell}\ |\overline{z}|\ (r_k\ s_{k\ell}^{(\ell)} - r_\ell\ s_{k\ell}^{(k)})}{r_k\ r_\ell\ R_{k\ell}^2 + \overline{z}^2\ s_{k\ell}^{(k)}\ s_{k\ell}^{(\ell)}}\right];$$

alors

$$\text{(A1.10)} \qquad V_h^\ell(P) = \sum_{k,\ell} (R_{k\ell}\ Q_{k\ell} + |\overline{z}|\ J_{k\ell}) - \Delta\theta|\overline{z}|$$

avec

$$\Delta\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } P_0 \text{ extérieur à } Q_{k\ell}\ , \\ 2\pi & \text{si } P_0 \text{ intérieur à } Q_{k\ell}\ . \end{cases}$$

Pour terminer, on vérifie que

$$\sum_{k,\ell} R_{k\ell}\ \frac{\partial\ Q_{k\ell}}{\partial\ \overline{x}} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k,\ell} \frac{\partial\ J_{k\ell}}{\partial\ \overline{x}} = 0\ ,$$

et de même pour $\overline{y}$ et $\overline{z}$. Ceci permet d'établir que

$$\text{(A1.11)} \qquad \text{grad}\ V_h^\ell(P) = \begin{cases} S_{12}\ Q_{12} + S_{23}\ Q_{23} + S_{34}\ Q_{34} + S_{41}\ Q_{41} \\ -(C_{12}\ Q_{22} + C_{23}\ Q_{23} + C_{34}\ Q_{34} + C_{41}\ Q_{41}) \\ (\text{sign}\ \overline{z})(J_{12} + J_{23} + J_{34} + J_{41} - \Delta\theta) \end{cases}$$

en coordonnées locales.

A P P E N D I C E (2)

Calcul de la dérivée normale de V_h^ℓ en $p \in \Gamma_h$.

Notons (x,y,z) et $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ les systèmes des coordonnées dans le repère fixe et le repère local lié à $Q_{h\ell}$ respectivement. On peut noter sans risque de confusion

$$\nabla_{(x,y,z)} = \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{matrix} \qquad \text{le gradient dans le repère fixe}$$

et

$\nabla_{(\bar{x},\bar{y},\bar{z})}$ le gradient dans le repère local.

Si A_ℓ désigne la matrice transposée de la matrice de changement de base (du repère fixe au repère local), on a

$$\nabla_{(x,y,z)} = A_\ell \cdot \nabla_{(\bar{x},\bar{y},\bar{z})} \ ;$$

soit $n_h(p)$ la normale (extérieure) en p à Γ_h et soit $P \in \Omega$; sur la normale en p à Γ_h , quelconque,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_h^\ell}{\partial n_h}(p)\Big|_{int\Gamma_h} &= \lim_{P \to p} (\nabla_{(x,y,z)} V_h^\ell(P), n_h(p)) \\ &= \lim_{P \to p} (A_\ell \cdot \nabla_{(\bar{x},\bar{y},\bar{z})} V_h^\ell(P), n_h(p)) \\ &= \lim_{P \to p} (\nabla_{(\bar{x},\bar{y},\bar{z})} V_h^\ell(P), A_\ell^t n_h(p)). \end{aligned} \tag{A2.1}$$

Or $A_\ell^t n_h(p)$ est la normale en p exprimée dans le repère local lié à $Q_{h\ell}$. Si $p \in Q_{h\ell}$, alors

$$A_\ell^t n_h(p) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Par ailleurs

$$\nabla_{(\bar{x},\bar{y},\bar{z})}\, V^{\ell}(P) = \begin{cases} S_{12}\, Q_{12} + S_{23}\, Q_{23} + S_{34}\, Q_{34} + S_{41}\, Q_{41} \\ -C_{12}\, Q_{12} - C_{23}\, Q_{23} - C_{34}\, Q_{34} - C_{41}\, Q_{41} \\ \text{sign}\,(\bar{z})(J_{12} + J_{23} + J_{34} + J_{41} - \Delta\theta)\ . \end{cases}$$

Les quantités C_{ij} , S_{ij} , Q_{ij} , J_{ij} , étant définies pour tout P n'appartenant pas à un côté de $Q_{h\ell}$, le passage à la limite donne sign $(\bar{z}) = -1$ car on suppose Ω et Ω_h convexes, et $\Delta\theta = 2\pi$, d'où, si p n'est pas sur un côté de $Q_{h\ell}$:

$$\lim_{P \to p} \nabla_{(\bar{x},\bar{y},\bar{z})}\, V_h^{\ell}(P) = \begin{cases} S_{12}\, Q_{12} + S_{23}\, Q_{23} + S_{34}\, Q_{34} + S_{41}\, Q_{41} \\ -C_{12}\, Q_{12} - C_{23}\, Q_{23} - C_{34}\, Q_{34} - C_{41}\, Q_{41} \\ 2\pi \end{cases}$$

avec C_{ij} , S_{ij} , Q_{ij} définies en p . Finalement

$$\frac{\partial V_h^{\ell}}{\partial n_h}(p)\Big|_{\text{int}\,\Gamma_h} = (\nabla_{(\bar{x},\bar{y},\bar{z})}\, V_h^{\ell}(p),\, A_{\ell}^{t}\, n_h(p)) \quad \text{si} \quad p \in Q_{hk}\ ,\ k \neq \ell$$

et

$$\frac{\partial V_h^{\ell}}{\partial n_h}(p)\Big|_{\text{int}\,\Gamma_h} = 2\pi \qquad \text{si} \quad p \in Q_{h\ell}\ .$$

Mais si $\pi_0\, q_h^i$ est la charge de $\pi^*\, v_h^i$, en posant

$$q_{h\ell}^i = \pi_0\, q_h^i\big|_{Q_{h\ell}}\ ,$$

on a

$$\pi^*\, v_h^i(p) = \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell=1}^{NQ} q_{h\ell}^i\, V_h^{\ell}(p)\ ,\ \forall\ p \in \mathbb{R}^3\ .$$

Alors

$$\text{(A2.2)} \qquad \frac{\partial \pi^* V_h^i}{\partial n_h}(p)\Big|_{\text{int}\,\Gamma_h} = \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell \neq k} q_{h\ell}^i\, (\nabla_{(\bar{x},\bar{y},\bar{z})}\, V_h^{\ell}(p), A_{\ell}^{t}\, n_h(p)) + \frac{q_{hk}^i}{2}\ ,$$

$\forall\ p \in \Gamma_h$, $p \in Q_{hk}$ et $1 \leqslant i \leqslant NN$. De même, on a

$$\text{(A2.3)} \qquad \frac{\partial \pi^* V_h^i}{\partial n_h}(p)\Big|_{\text{ext}\,\Gamma_h} = \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell \neq k} q_{h\ell}^i\, (\nabla_{(\bar{x},\bar{y},\bar{z})}\, V_h^{\ell}(p), A_{\ell}^{t}\, n_h(p)) - \frac{q_{hk}^i}{2}\ .$$

Les résultats numériques pour le calcul de la dérivée normale intérieur obtenus par cette méthode ne sont signaficatifs qu'au seul point de $Q_{h\ell}$

annulant les dérivées tangentielles de V_h^ℓ ; le point p doit donc vérifier

$$\frac{\partial V_h^\ell}{\partial \bar{x}}(p) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial V_h^\ell}{\partial \bar{y}}(p) = 0 \ .$$

Dans le cas où $Q_{h\ell}$ est un quadrilatère, le barycentre donne une bonne approximation de p .

Pour la justification d'une telle contrainte et la localisation d'un tel point pour les triangles, nous renvoyons à l'article de J.L. HESS et A.M.O. SMITH [20].

Une fois les dérivées normales calculées aux barycentres des éléments, leurs valeurs en d'autres points de Γ_h s'obtiennent par interpolation.

Dans ce paragraphe comme dans le précédent, on réduit considérablement les coûts de calcul pour NN, NQ grands, en prenant un développement limité de $V_h^\ell(P)$, $P \in Q_{hk}$, quand P est assez éloigné du barycentre de $Q_{h\ell}$.

D'autre part, l'espace nécessaire pour stocker les charges $\pi_0 q_h^i$ des NN potentiels de simple couche $\pi^* v_h^i$ et leur dérivée normale aux NQ barycentres des éléments augmente considérablement les coûts de calcul.

On peut réduire ce coût quand Ω présente des plans de symétrie. Dans (2.20), on n'a donc qu'un seul noeud d'intégration numérique par élément.

Dans la programmation, cette partie est la plus coûteuse en place-mémoire et temps de calcul, et la plus délicate du point de vue de la précision des résultats.

A P P E N D I C E (3)

Calcul de $W_{hi}^{k}(P) = \int_{T_{hk}} v_h^i(x) \frac{\partial}{\partial n_h(x)}\Big|_{\text{int } \Gamma_h} \left(\frac{1}{|x-P|}\right) d\Gamma_h(x)$, $P \in \mathbb{R}^3$,
T_{hk} = triangle de $\mathbb{R}^3$.

On conserve les notations de l'Appendice (1) : $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est le repère fixe dans lequel $P = (x,y,z)$, $O' = (x_0,y_0,z_0)$ est un point du plan de T_{hk} et $(O',\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$ le repère local tel que T_{hk} soit contenu dans le plan $(O',\vec{i}',\vec{j}')$, $\vec{k}'$ étant la normale extérieure à Γ_h restreinte à T_{hk}.

Dans la suite, on écrira T au lieu de T_{hk} pour alléger l'écriture ; (ξ,η,ν) sera le système de coordonnées locales, $X = (\xi,\eta,0)$ point quelconque de T et $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ les coordonnées de P dans le repère local.

Dans le repère local, $v_h^i|_T$ étant affine, pour tout $X = (\xi,\eta,0) \in T$, $v_h^i|_T(X) = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma$, où α, β, γ, sont des constantes qui ne dépendent que de $v_h^i|_T$. D'autre part, $n_{hX} = k' = \begin{vmatrix}0\\0\\1\end{vmatrix}$ dans ce même repère ; or, dans le repère fixe,

$$\frac{\partial}{\partial n_{hX}} \left(\frac{1}{|X-P|}\right) = - \frac{n_{hX} \cdot X-P}{|X-P|^3},$$

ce qui, en coordonnées locales, devient

$$n_{hX} \cdot X-P = \begin{vmatrix}0\\0\\1\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix}\xi-\bar{x}\\ \eta-\bar{y}\\ -z\end{vmatrix} = -\bar{z},$$

et donc

$$\frac{\partial}{\partial n_{hX}} \left(\frac{1}{|X-P|}\right) = \frac{\bar{z}}{[(\xi-\bar{x})^2+(\eta-\bar{y})^2+\bar{z}^2]^{\frac{3}{2}}} ;$$

par conséquent

$$W_{hi}^{k}(P) = \bar{z} \int_T \frac{(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma)}{[(\xi-\bar{x})^2+(\eta-\bar{y})^2+\bar{z}^2]^{\frac{3}{2}}} \, d\xi \, d\eta$$

$$= \bar{z} \left[\gamma \int_T \frac{d\xi \, d\eta}{r^3} + \alpha \int_T \frac{\xi \, d\xi \, d\eta}{r^3} + \beta \int_T \frac{\eta \, d\xi \, d\eta}{r^3}\right]$$

où

$$r = \sqrt{(\xi-\bar{x})^2+(\eta-\bar{y})^2+\bar{z}^2} .$$

Puisque

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{(\xi-\bar{x})}{r^3} \quad , \quad \frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{(\eta-\bar{y})}{r^3} \quad ,$$

alors

$$(A3.1) \qquad W_{hi}^{k}(P) = \bar{z}\left[(\gamma + \alpha\bar{x} + \beta\bar{y})\int_T \frac{d\xi\, d\eta}{r^3} - \alpha\int_T \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{r}\right) d\xi\, d\eta - \beta\int_T \frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{r}\right) d\xi\, d\eta\right].$$

Tout revient donc à calculer les intégrales

$$\int_T \frac{d\xi\, d\eta}{r^3} \; ; \; \int_T \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{r}\right) d\xi\, d\eta \; ; \; \int_T \frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{r}\right) d\xi\, d\eta \; .$$

Comme dans l'Appendice (1), on suppose que $Q_m = (\xi_m, \eta_m, 0)$ pour $1 \leqslant m \leqslant 3$ sont les sommets de T et

$$r_m = |P - Q_m| = \sqrt{(\xi_m - \bar{x})^2 + (\eta_m - \bar{y})^2 + \bar{z}^2} \; .$$

Si $n = m+1$ pour $m < 3$ et $n = 1$ pour $m = 3$, alors

$$d_{mn} = |Q_m - Q_n| = \sqrt{(\xi_m - \xi_n)^2 + (\eta_m - \eta_n)^2} \; ;$$

$$c_{mn} = \frac{\xi_n - \xi_m}{d_{mn}} \quad , \quad s_{mn} = \frac{\eta_n - \eta_m}{d_{mn}} \; .$$

On suppose (seulement) que les sommets de T sont numérotés dans le sens indirect.

Alors, des calculs tout à fait classiques et un réamènagement des expressions finales - comme dans le cas de $\varphi_{12}^{(1)}$ de l'Appendice (1) - conduisent à

$$(A3.2) \qquad \int_T \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{r}\right) d\xi\, d\eta = \sum_{m,n} s_{mn} \operatorname{Log} \frac{r_m + r_n - d_{mn}}{r_m + r_n + d_{mn}}$$

$$(A3.3) \qquad \int_T \frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{r}\right) d\xi\, d\eta = \sum_{m,n} c_{mn} \operatorname{Log} \frac{r_m + r_n + d_{mn}}{r_m + r_n - d_{mn}} \; .$$

Calcul de $\int_T \frac{d\xi\, d\eta}{r^3}$

Dans ce qui suit, on procède de la même manière que dans l'Appendice (1). $P_0 = (\bar{x},\bar{y},0)$ est la projection de P sur le plan $(O',\vec{i}',\vec{j}')$; pour $X = (\xi,\eta,0)$ appartenant à ce plan, si $\theta = (-\vec{i}',P_0\vec{X})$ désigne l'angle de ces deux directions et $\rho = |P_0 - X| = \sqrt{(\bar{x}-\xi)^2+(\bar{y}-\eta)^2}$, alors

$$\xi - \bar{x} = \rho \cos\theta ,$$

$$\eta - \bar{y} = \rho \sin\theta .$$

En faisant le changement de variable $(\xi,\eta) \to (\rho,\theta)$, l'intégrale devient

$$d\xi\, d\eta = \rho\, d\rho\, d\theta \quad ;$$

$$\int_T \frac{d\xi\, d\eta}{r^3} = \int_T \frac{\rho\, d\rho\, d\theta}{(\rho^2+\bar{z}^2)^{\frac{3}{2}}} = -\int_T \frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2+\bar{z}^2}}\right) d\rho\, d\theta .$$

Pour les mêmes raisons que dans l'Appendice (1), cette intégrale sur T est égale à la somme des intégrales sur les triangles $P_0\, Q_m\, Q_n$, où $1 \leqslant m \leqslant 3$, $n = m+1$ si $m < 3$ et $n = 1$ si $m = 3$. Donc

$$\int_T \frac{d\xi\, d\eta}{r^3} = -\sum_{m,n} \int_{P_0 Q_m Q_n} \frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2+\bar{z}^2}}\right) d\rho\, d\theta$$

$$= -\sum_{m,n} \int_{\theta_m,\theta_n} d\theta \int_0^R \frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2+\bar{z}^2}}\right) d\rho$$

$$= -\sum_{m,n} \int_{\theta_m,\theta_n} \left[\frac{1}{\sqrt{R^2+\bar{y}^2}} - \frac{1}{|\bar{z}|}\right] d\theta ,$$

où pour θ fixé, R est la distance de P_0 au point X_θ du côté $Q_m Q_n$ tel que $(-\vec{i}',P_0\vec{X}_\theta) = \theta$. Donc

$$\int_T \frac{d\xi\, d\eta}{r^3} = \frac{\Delta\theta}{|\bar{z}|} - \sum_{m,n} \int_{\theta_m,\theta_n} \frac{1}{\sqrt{R^2+\bar{z}^2}} .$$

Si l'on note

$$\psi_{mn} = \int_{\theta_m,\theta_n} \frac{1}{\sqrt{R^2+\bar{z}^2}} ,$$

le calcul de ces quantités se fait comme celui des φ_{mn} ou précisément celui de φ_{12} de l'Appendice (1).

Cas ψ_{12}

$$\psi_{12} = \int_{\theta_1,\theta_2} \frac{d\theta}{\sqrt{R^2+\bar{z}^2}} \quad ;$$

on transforme cette intégrale en θ en intégration le long de $Q_1 Q_2$ de la même manière que dans le cas φ_{12} :

$$\psi_{12} = \int_{\theta_1,\theta_2} \frac{d\theta}{\sqrt{R^2+\bar{z}^2}} = \int_{s_{12}^{(1)}}^{s_{12}^{(2)}} \frac{R_{12}\, ds}{R^2\sqrt{R^2+\bar{z}^2}} \quad ,$$

$s_{12}^{(1)}$, $s_{12}^{(2)}$, R_{12} et ds_{12} désignant les mêmes choses que dans l'Appendice (1). Par conséquent

$$\psi_{12} = \frac{\varphi_{12}^{(2)}}{\bar{z}^2} = \frac{1}{|\bar{z}|} \text{ arc tg } \left[\frac{R_{12}|\bar{z}|\ (r_1 s_{12}^{(2)} - r_2 s_{12}^{(1)})}{r_1 r_2 R_{12}^2 + \bar{z}^2\ s_{12}^{(1)} s_{12}^{(2)}}\right] ,$$

arc tg étant évalué entre $-\pi$ et $+\pi$. Par permutation circulaire, pour $1 \leqslant m \leqslant 3$, $n = m+1$ si $m < 3$ et $n = 1$ si $m = 3$, en notant

$$J_{mn} = \text{arc tg } \left[\frac{R_{mn}|\bar{z}|\ (r_m s_{mn}^{(n)} - r_n s_{mn}^{(m)})}{r_m r_n R_{mn}^2 + \bar{z}^2\ s_{mn}^{(m)} s_{mn}^{(n)}}\right],$$

on obtient le résultat final

$$\text{(A3.4)} \qquad \int_T \frac{d\xi\, d\eta}{r^3} = \frac{1}{|\bar{z}|}\left[\Delta\theta - \sum_{m,n} J_{mn}\right] ,$$

où

$$\Delta\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } P_0 \text{ est extérieur à } T \ , \\ 2\pi & \text{si } P_0 \text{ est intérieur à } T \ . \end{cases}$$

REMARQUE : Si q_h désigne la charge de u_h , constante par morceaux, la dérivée normale intérieure de u_h en un point $y \in \Gamma_h$ s'écrit

$$\frac{\partial u_h}{\partial n_h}(y) = \frac{q_h(y)}{2} + \frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_h} q_h(x) \frac{\partial}{\partial n_{hy}}\left(\frac{1}{|x-y|}\right) d\Gamma_h(x)$$

$$= \frac{q_h(y)}{2} + \frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{NQ} q_h^k \int_{Q_{hk}} \frac{\partial}{\partial n_{hy}}\left(\frac{1}{|x-y|}\right) d\Gamma_h(x)$$

où $q_k^h = q_h(x)|_{Q_{hk}}$. Soit

$$G_{hk}(y) = \int_{Q_{hk}} \frac{\partial}{\partial n_{hy}} \left(\frac{1}{|x-y|}\right) d\Gamma_h(x) ,$$

alors

$$\frac{\partial u_h}{\partial n_h}(y) = \frac{q_h(y)}{2} + \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{NQ} q_h^k \, G_{hk}(y) . \tag{A3.5}$$

L'objet de la remarque est que $G_{hk}(y)$ se calcule aisément à partir de (A3.2), (A3.3), (A3.4), ce qui permet de se passer des résultats de l'Appendice (2). En effet,

$$\frac{\partial}{\partial n_{hy}} \left(\frac{1}{|x-y|}\right) = - \frac{n_{hy} \cdot x-y}{|x-y|^3} .$$

En supposant le repère lié à Q_{hk} , l'axe des z dirigé selon la normale à Q_{hk} , et en notant dans ce repère

$n_{hy} = (n^1_{hy}, n^2_{hy}, n^3_{hy})$;

$x = (\xi,\eta,0)$ = un élément quelconque de Q_{hk} ;

$y = (y_1,y_2,y_3)$;

$r = |x-y| = \sqrt{(\xi-y_1)^2+(\eta-y_2)^2+y^3}$;

on a

$$G_{hk}(y) = - \int_{Q_{hk}} \frac{n^1_{hy}(\xi-y_1)+n^2_{hy}(\eta-y_2)+n^3_{hy}\, y_3}{r^3} \, d\xi \, d\eta ,$$

et puisque

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{r}\right) = - \frac{\xi-y_1}{r^3} \quad , \quad \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1}{r}\right) = - \frac{\eta-y_2}{r^3} ,$$

alors

$$G_{hk}(y) = n^1_{hy} \int_{Q_{hk}} \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{r}\right) d\xi \, d\eta + n^2_{hy} \int_{Q_{hk}} \frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{r}\right) d\xi \, d\eta - n^3_{hy}\, y_3 \int_{Q_{hk}} \frac{d\xi d\eta}{r^3} . \tag{A3.6}$$

Si $y \in Q_{h\ell}$, on remarquera que $G_{h\ell}(y) = 0$ puisque n_{hy} et y sont orthogonaux si $x \in Q_{h\ell}$. Par ailleur , pour déterminer (A3.6), il suffira d'adapter les expressions de (A3.2), (A3.3), (A3.4), quand Q_{hk} est un quadrilatère.

CHAPITRE III

MISE EN OEUVRE ET RÉSULTATS NUMÉRIQUES

III.1 - GENERALITES SUR LA METHODE

Il existe diverses méthodes pour résoudre les problèmes de minimisation comme (2.35) (minimisation avec contrainte). On trouvera la description d'un grand nombre de ces méthodes dans TREMOLIERES [33], GLOWINSKI-LIONS-TREMOLIERES [18] et CEA [6].

Dans la résolution des exemples qui suivent, nous avons utilisé deux méthodes :

. la méthode de relaxation avec projection ;

. la méthode de FLETCHER-POWELL [16] : cette méthode est disponible dans la bibliothèque HARWELL du CIRCE.

Dans les exemples traités, nous prenons pour Ω un ouvert de révolution. En prenant OZ comme axe de révolution, la connaissance de la courbe (paramétrée) trace de Γ sur le demi-plan $\{XOZ,\ X \geq 0\}$ suffit à déterminer Γ. En se donnant M points sur cette courbe (les deux extrémités exclues) et en faisant des rotations d'angles $k \cdot \frac{2\pi}{N}$ autour de l'axe OZ $(k = 1,..,N-1)$, on obtient un système de points qui, avec les deux extrémités, permet de construire une triangulation d'une surface Γ_h distincte de Γ mais dont les noeuds sont sur Γ. Les éléments ayant l'un des deux noeuds portés par OZ pour sommet sont des triangles, les autres des quadrilatères.

Dans tous les exemples, on aura

$NQ = (M+1) \cdot N$ = nombre d'éléments (dont $2N$ triangles) ;

$NN = M \cdot N+1$ = nombre de noeuds.

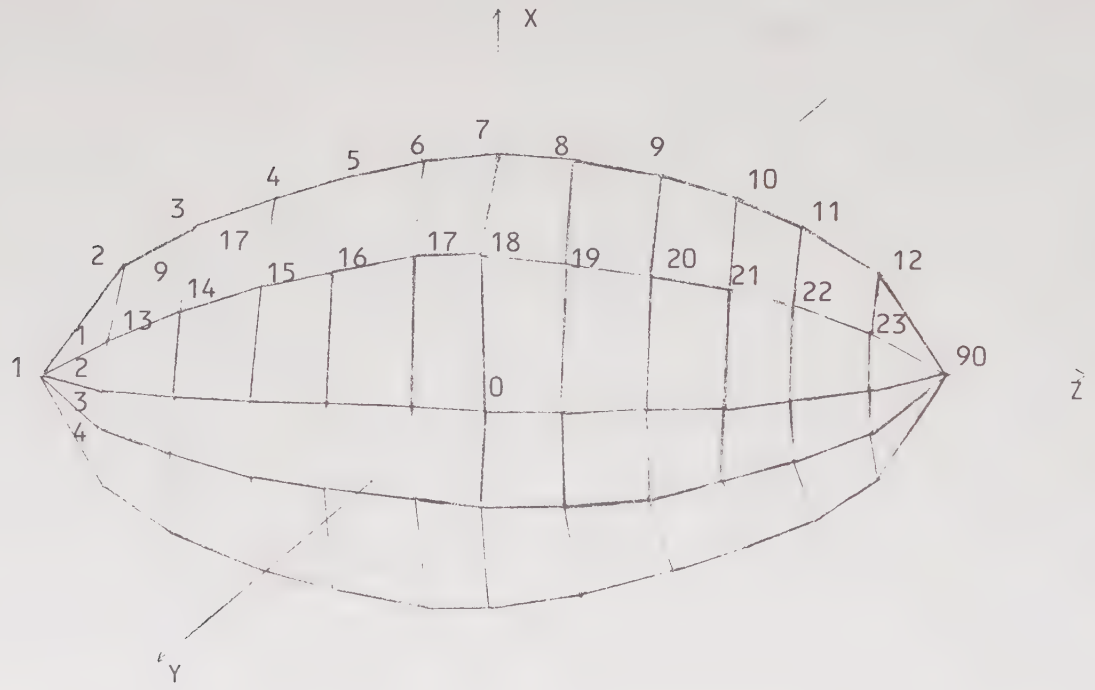
On prendra Ω centré à l'origine ; ce sera l'intérieur de la sphère unité $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ ou de l'ellipsoïde $X^2 + Y^2 + \frac{Z^2}{4} = 1$.

Pour tester la méthode, on prendra pour $u(X,Y,Z)$ des harmoniques sphériques. Il suffira alors de choisir $u_0(X,Y,Z)$ et $G(X,Y,Z)$ telles que

$$\left.\begin{array}{l} u - u_0 \geqslant 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} - G \geqslant 0 \\ (u - u_0)\left(\dfrac{\partial u}{\partial n} - G\right) = 0 \end{array}\right\} \text{ sur } \Gamma .$$

Un exemple de triangulation

Dans le plan OX,OZ , la trace de Γ est paramètrée de la façon suivante : $X(t) = \sin(t)$, $Z(t) = -2\cos(t)$, $t \in [0,\pi]$.



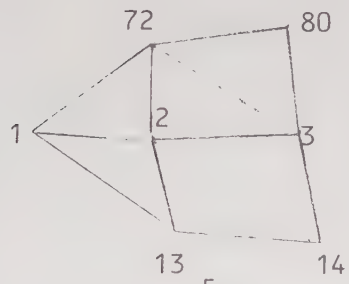
Dans ce cas, M = 11 et N = 8, d'où NN = nombre de noeuds = 90 ; la numérotation est faite méridien par méridien en commençant par celui qui est dans le plan XOZ. Les noeuds n° 1 et 90 sont les deux pôles. NQ = nombre d'éléments = 96, dont 16 triangles ; ils sont numérotés comme indiqué sur la figure.

Les fonctions de base $v_h^i \in V_h$ sont définies de la manière suivante :

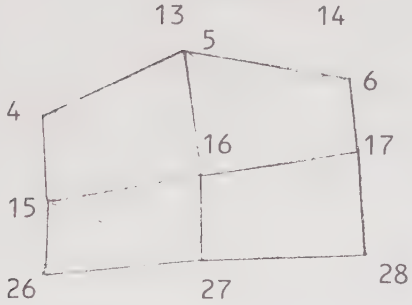
$v_h^i(a_j) = \delta_{ij}$, $(a_j)_{1\leqslant j\leqslant NN}$ les noeuds de Γ_h ;

si l'élément $Q_{h\ell}$, $1\leqslant \ell \leqslant NQ$ de Γ_h est un triangle, on impose que v_h^i soit affine sur $Q_{h\ell}$. Si $Q_{h\ell}$ est un quadrilatère de sommets a_{ℓ_1} , a_{ℓ_2} , a_{ℓ_3} , a_{ℓ_4} , $Q_{h\ell} = Q_{h\ell}^1 \cup Q_{h\ell}^2$, où $Q_{h\ell}^1$ est le triangle de sommets a_{ℓ_1} , a_{ℓ_2} , a_{ℓ_3} , et $Q_{h\ell}^2$ le triangle de sommets a_{ℓ_1} , a_{ℓ_3} , a_{ℓ_4} ; on impose alors que v_h^i soit affine sur $Q_{h\ell}^1$ et $Q_{h\ell}^2$. En fait, ceci revient à décomposer Γ_h en triangles et à utiliser les résultats de II.2.6.

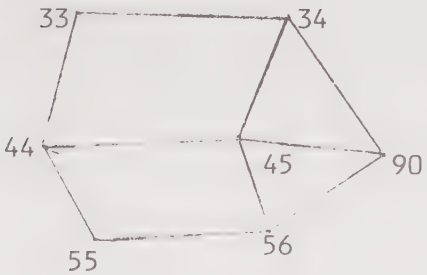
Nous avons les situations types suivantes :



supp (v_h^2)



supp (v_h^{16})

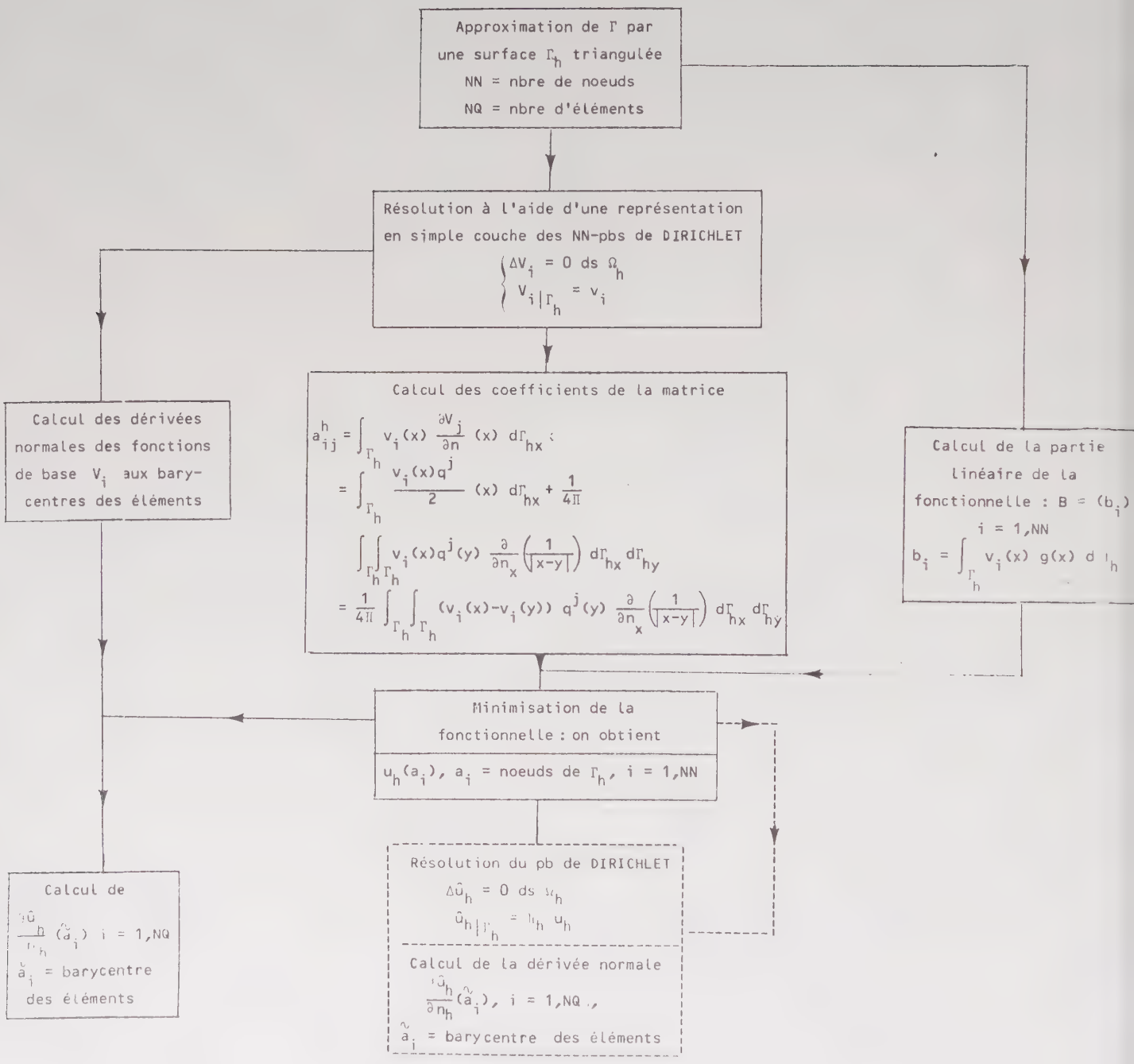


supp (v_h^{45})

supp (v_h^1) = union des triangles n° 1 à 8

supp (v_h^{90}) = union des triangles n° 89 à 96

ORGANIGRAMME



La résolution de (2.35) donne $\pi^* u_h$ aux noeuds $(a_i)_{1\leq i\leq NN}$ de Γ_h . (2.27)' donne alors

$$\forall\, x \in \Gamma_h\ ,\ \frac{\partial(\gamma_{0h}^{-1}\,\pi^* u_h)}{\partial n_h}(x) = \sum_{i=1}^{NN} \pi^* u_h(a_i)\,\frac{\partial \pi^* v_h^i}{\partial n_h}(x)\ .$$

Ceci permet en particulier de calculer cette dérivée normale au barycentre $\tilde{a}_\ell$ de $Q_{h\ell}$ $(1\leq \ell\leq NQ)$.

Nous avons résolu (2.35) avec les deux méthodes indiquées au début du paragraphe. Avec l'algorithme de relaxation avec projection, le test d'arrêt est

$$\frac{\sum_{i=1}^{NN} |u_i^{n+1} - u_i^n|}{\sum_{i=1}^{NN} |u_i^{n+1}|} \leq 10^{-6}\ ,$$

u_i^k désignant la ième composante du vecteur obtenu à la kème itération.

III.2 - EXEMPLES QUAND Ω EST UNE SPHERE

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \; ; \; x^2 + y^2 + z^2 < 1\right\} \quad ;$$

$$\Gamma = \partial\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \; ; \; x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\} .$$

Exemple 1

Soient

$$u_0(x,y,z) = \begin{cases} z-z^2 & \text{si} \quad z \leqslant 0 \\ z & \text{si} \quad z > 0 \end{cases}$$

et

$$G(x,y,z) = \begin{cases} z & \text{si} \quad z \leqslant 0 \\ z-200\,z^2 & \text{si} \quad z \geqslant 0 \end{cases}$$

La solution exacte du problème est alors

$$u(x,y,z) = z$$

d'où

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,y,z)\Big|_{\Gamma \text{ int}} = z \ .$$

Pour NQ = 200, NN = 192, et OME = 1,7 (le paramètre de relaxation, non optimal), l'algorithme converge en 124 itérations.

Etant donné la particularité de la solution u, les valeurs de u et $\pi^* u_h$ aux autres noeuds se déduisent de celles aux noeuds d'un seul méridien, par exemple, celui contenu dans le demi-plan $X \geqslant 0$ de XOZ.

Pour NQ = 100, NN = 92, la figure 1.1 donne l'allure de $\pi^* u_h$; le tableau 1.1 compare les valeurs de u et $\pi^* u_h$ aux noeuds.

La figure 1.2 et le tableau 1.2 jouent le même rôle pour NQ = 200, NN = 192 ; la figure 1.3 indique l'allure de $\dfrac{\partial \gamma_{0h}^{-1} \pi^* u_h}{\partial n_h}(\widetilde{a}_\ell)$, $(\widetilde{a}_\ell)$ représentant les barycentres des éléments compris entre deux méridiens donnés et $\dfrac{\partial u}{\partial n}$.

Coordonnée de a_i selon l'axe z	$\Pi^* U_h(a_i)$	$U(a_i)$	$\lvert U(a_i) - \Pi^* U_h(a_i) \rvert / \lvert U(a_i) \rvert$	$u_0(a_i)$
-1	-0.9791	-1.	0.02092	-2
-0.9511	-0.9691	-0.9511	0.01896	-1.856
-0.8090	-0.8133	-0.8090	0.00524	-1.464
-0.5878	-0.5979	-0.5878	0.01722	-0.9333
-0.3090	-0.3144	-0.3090	0.01745	-0.4045
$-.3140.10^{-6}$	$-.3140.10^{-6}$	$-.3140.10^{-6}$	$0.1818.10^{-6}$	$-.3140.10^{-6}$
0.3090	0.3090	0.3090	0.0	0.3090
0.5878	0.5878	0.5878	0.	0.5878
0.8090	0.8090	0.8090	0.	0.8090
0.9511	0.9511	0.9511	0.	0.9511
1.	1.	1.	0.	1.

Tableau 1.1

$u(x,y,z) = z$

$$u_0(x,y,z) = \begin{cases} z - z^2 & \text{si } z \leqslant 0 \\ z & \text{si } z > 0 \end{cases}$$

$$g(x,y,z) = \begin{cases} z & \text{si } z \quad 0 \\ z - 200z & \text{si } z \quad 0 \end{cases}$$

——————— solution exacte u

. . . solution $\Pi^* u_h$ pour NQ = 100, NN = 92

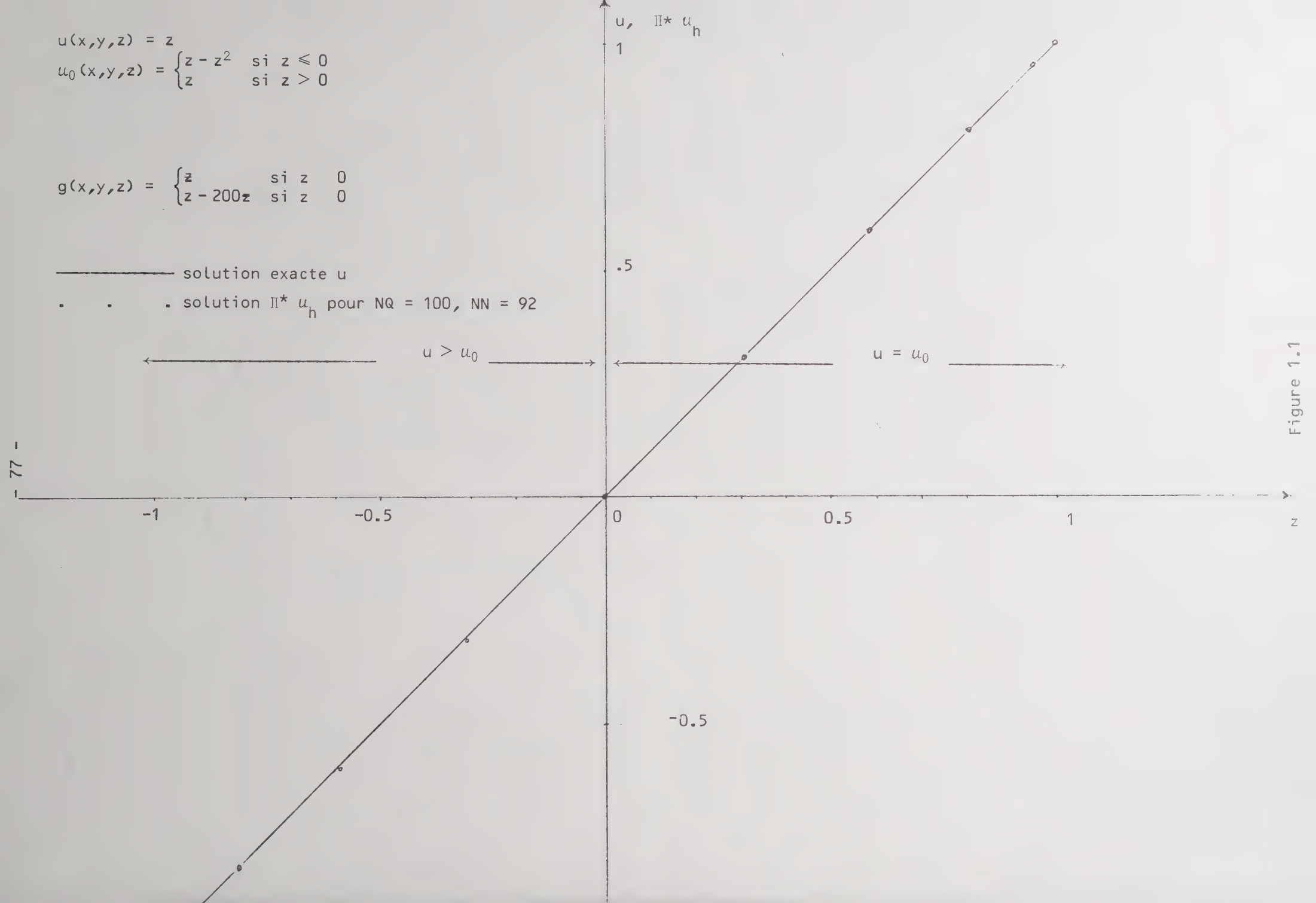


Figure 1.1

Coordonnée de a_i selon l'axe $\vec{z}$	$\Pi^* U_h(a_i)$	$U(a_i)$	$\lvert U(a_i) - \Pi^* U_h(a_i)\rvert / \lvert U(a_i)\rvert$	$u_0(a_i)$
-1.	-0.9978	-1.	0.00222	-2.
-0.9877	-1.013	-0.9877	0.02580	-1.963
-0.9511	-0.9611	-0.9511	0.01051	-1.856
-0.8910	-0.9120	-0.8910	0.02354	-1.685
-0.8090	-0.8197	-0.8090	0.01319	-1.464
-0.7071	-0.7244	-0.7071	0.02451	-1.207
-0.5878	-0.5965	-0.5878	0.01480	-0.9333
-0.4540	-0.4671	-0.4540	0.02898	-0.6601
-0.3090	-0.3146	-0.3090	0.01798	-0.4045
-0.1564	-0.1645	-0.1564	0.05131	-0.1809
$-0.3140.10^{-6}$	$-0.3140.10^{-6}$	$-0.3140.10^{-6}$	.	$-0.3140.10^{-6}$
0.1564	0.1564	0.1564	0.0	0.1564
0.3090	0.3090	0.3090	0.0	0.3090
0.4540	0.4540	0.4540	0.0	0.4540
0.5878	0.5878	0.5878	0.0	0.5878
0.7071	0.7071	0.7071	0.0	0.7071
0.8090	0.8090	0.8090	0.0	0.8090
0.8910	0.8910	0.8910	0.0	0.8910
0.9511	0.9511	0.9511	0.0	0.9511
0.9877	0.9877	0.9877	0.0	0.9877
1.	1.	1.	0.0	1.

Tableau 1.2

$u(x,y,z) = z$

$u_0(x,y,z) = \begin{cases} z - z^2 & \text{si } z \leqslant 0 \\ z & \text{si } z > 0 \end{cases}$

$g(x,y,z) = \begin{cases} \cdot & \text{si } z \leqslant 0 \\ z - 200z^2 & \text{si } z > 0 \end{cases}$

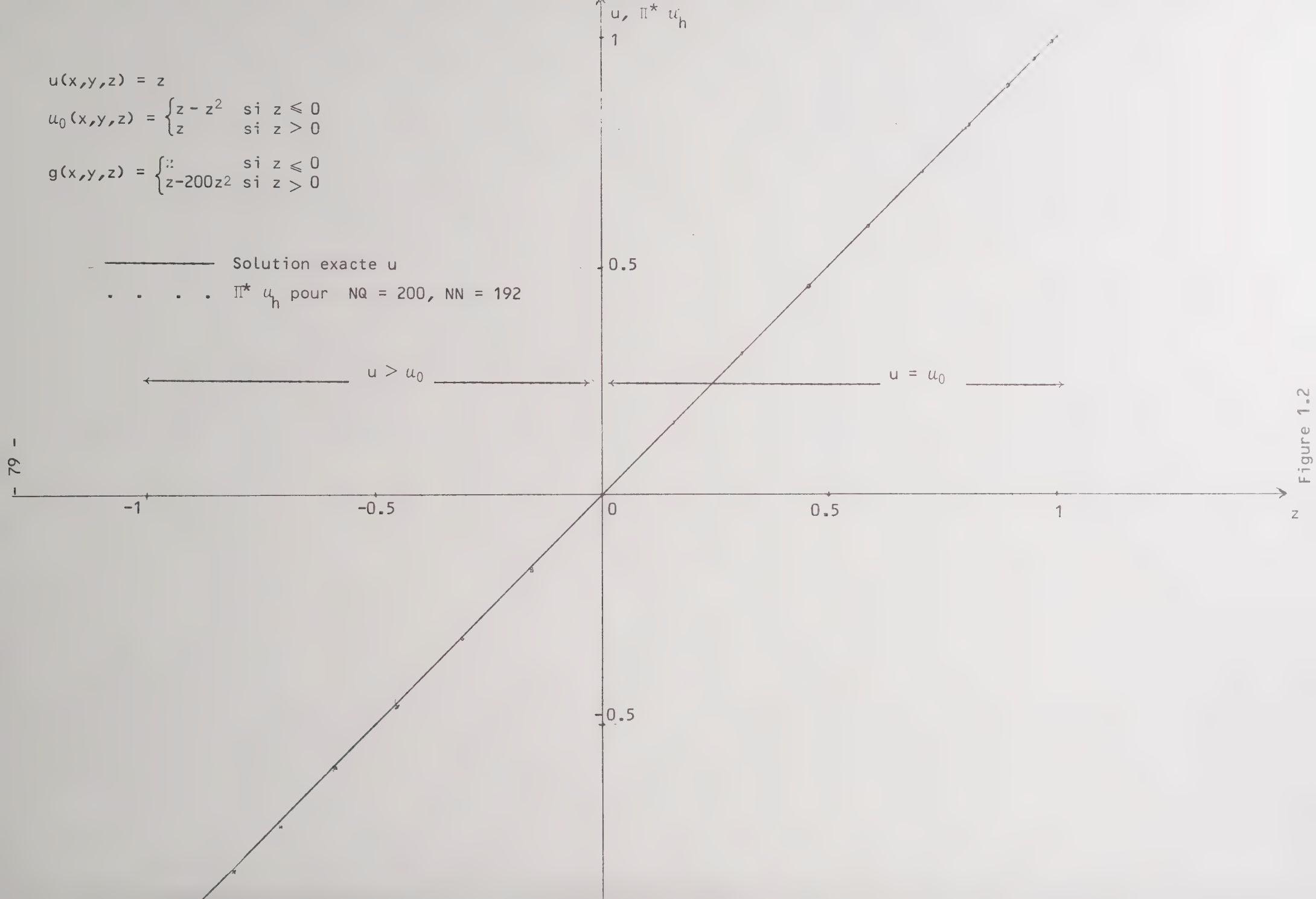


Figure 1.2

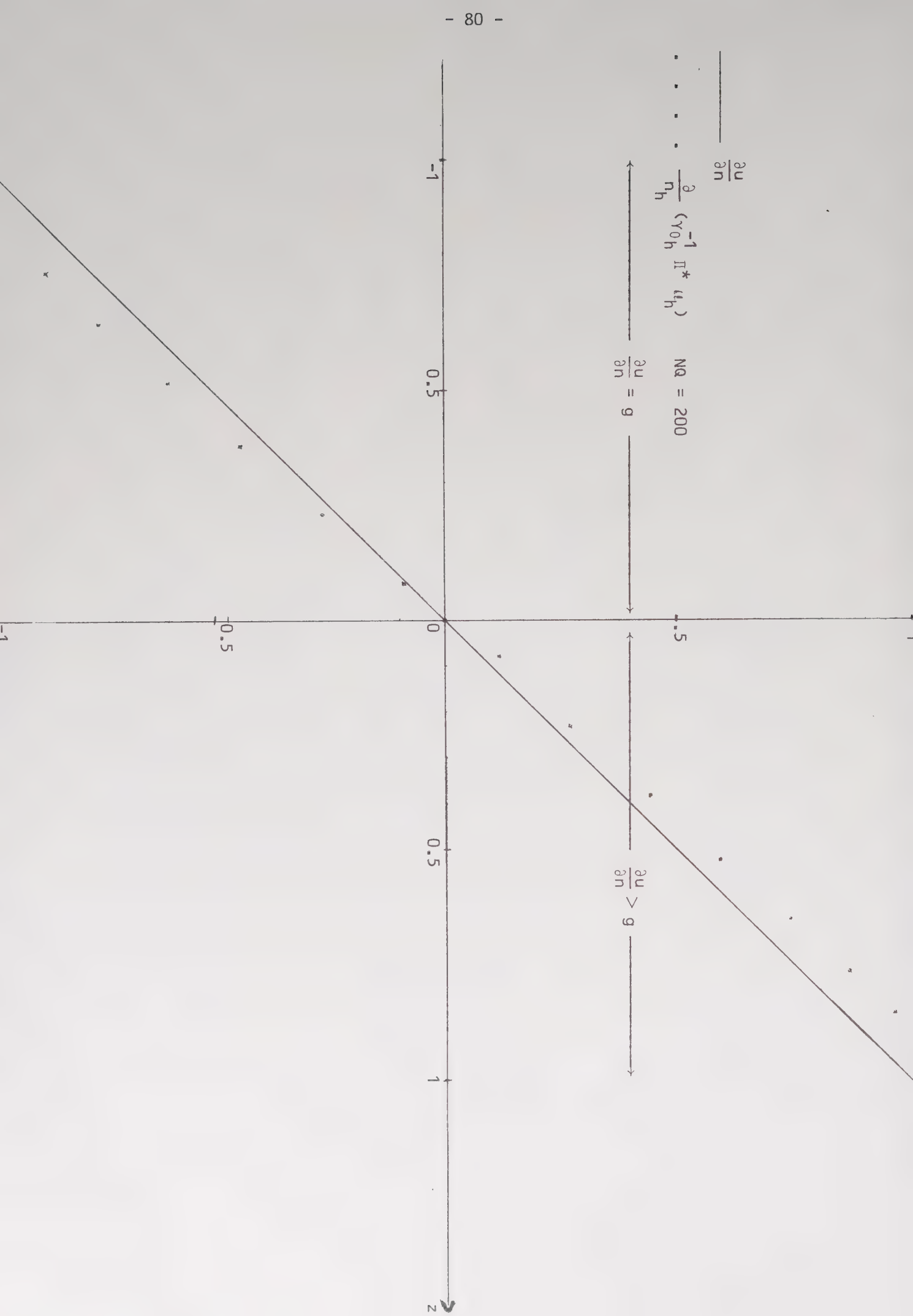

$\frac{\partial u}{\partial n}$
$\frac{\partial}{n_h}(\gamma_{0_h}^{-1} \Pi^*(\psi_h))$
$\frac{\partial u}{\partial n} = g$
NQ = 200
$\frac{\partial u}{\partial n} > g$
-1
-0.5
0
0.5
1
z

Figure 1.3

Exemple 2

$$u_0(x,y,z) = \begin{cases} z & \text{si } z \leqslant -0.5 \\ -0.5 & \text{si } -0.5 \leqslant z \leqslant 0 \\ 2z-0.5 & \text{si } 0 \leqslant z < 0.5 \\ z & \text{si } 0.5 \leqslant z \end{cases}$$

$$G(x,y,z) = \begin{cases} z-(z+0.5) & \text{si } z \leqslant -0.5 \\ z & \text{si } -0.5 \leqslant z < 0.5 \\ z-(z-0.5) & \text{si } 0.5 \leqslant z \end{cases}$$

La solution exacte est encore $u(x,y,z) = z$ et $\frac{\partial u}{\partial n}(x,y,z)\big|_\Gamma = z$.

On résoud ce problème de la même manière que précédemment. Pour NQ = 200, NN = 192, l'algorithme de relaxation converge au bout de 201 itérations avec OME = 1.7.

Les figures 2.1, 2.2, 2.3 et les tableaux 2.1, 2.2, jouent les mêmes rôles que les figures 1.1, 1.2, 1.3 et les tableaux 1.1, 1.2, respectivement de l'Exemple 1.

Coordonnée de a_i selon l'axe z	$\Pi^* U_h(a_i)$	$U(a_i)$	$\lvert U(a_i) - \Pi^* U_h(a_i)\rvert / \lvert U(a_i)\rvert$	$u_0(a_i)$
-1.	-1.	-1.	0.0	-1.
-0.9511	-0.9511	-0.9511	0.0	-0.9511
-0.8090	-0.8090	-0.8090	0.0	-0.8090
-0.5878	-0.5878	-0.5878	0.0	-0.5878
-0.3090	-0.3112	-0.3090	0.006907	-0.5
$-0.3140.10^{-6}$	$-0.3938.10^{-3}$	$-0.3140.10^{-6}$	.	-0.5
0.3090	0.3111	0.3090	0.006863	0.1180
0.5878	0.5878	0.5878	0.0	0.5878
0.8090	0.8090	0.8090	0.0	0.8090
0.9511	0.9511	0.9511	0.0	0.9511
1.	1.	1.	0.0	1.

Tableau 2.1

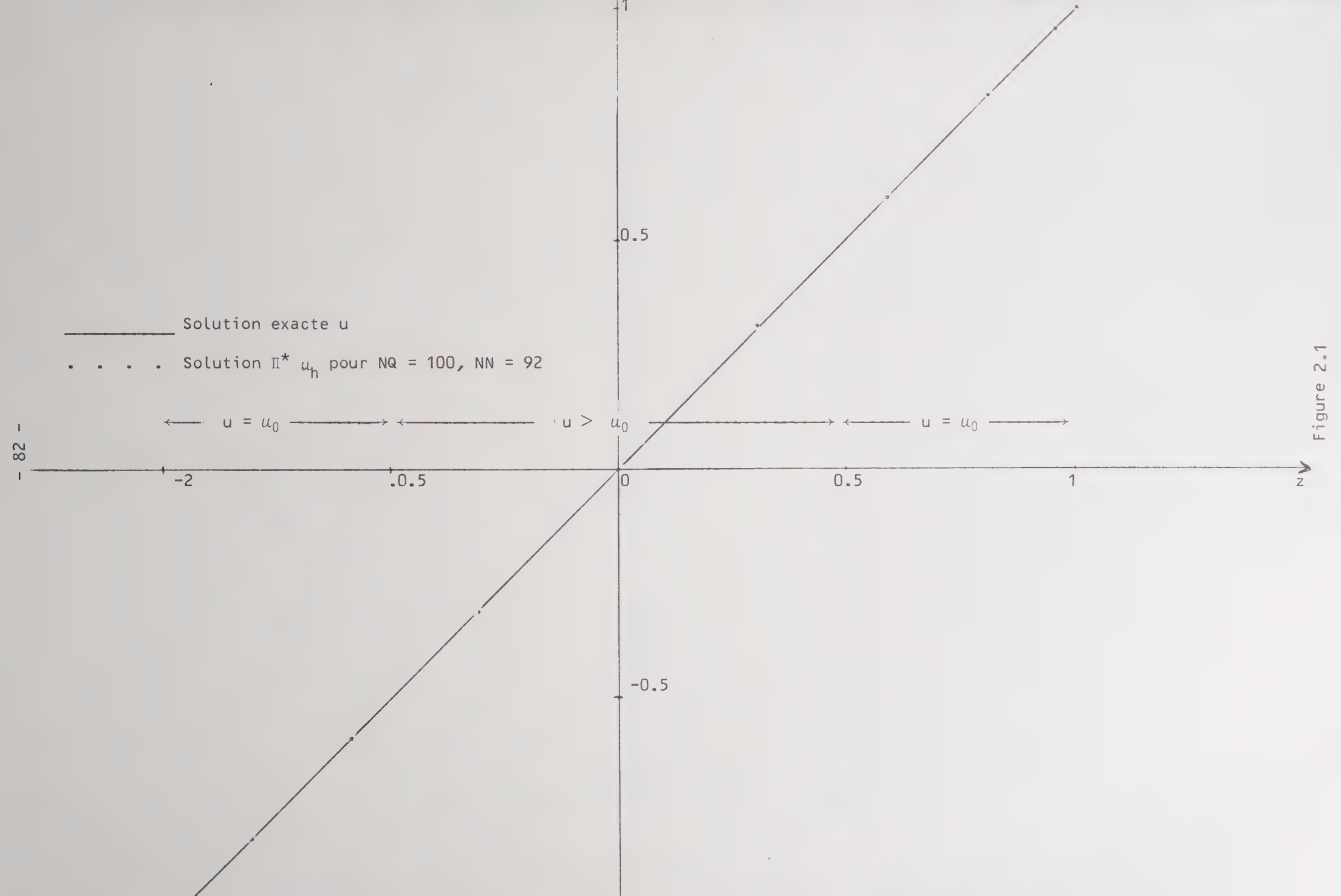

Solution exacte u
Solution Π* u_h pour NQ = 100, NN = 92
u = u_0
u > u_0
u = u_0
1
0.5
-0.5
-2
.0.5
0
0.5
1
z

Figure 2.1

Coordonnée de a_i selon l'axe z	$\Pi^* U_h(a_i)$	$U(a_i)$	$\lvert U(a_i) - \Pi^* U_h(a_i) \rvert / \lvert U(a_i) \rvert$	$u_0(a_i)$
-1.	-1.	-1.	0.0	-1.
-0.9877	-0.9877	-0.9877	0.0	-0.9877
-0.9511	-0.9511	-0.9511	0.0	-0.9511
-0.8910	-0.8910	-0.8910	0.0	-0.8910
-0.8090	-0.8090	-0.8090	0.0	-0.8090
-0.7071	-0.7071	-0.7071	0.0	-0.7071
-0.5878	-0.5878	-0.5878	0.0	-0.5878
-0.4540	-0.4568	-0.4540	0.006115	-0.5
-0.3090	-0.3103	-0.3090	0.004035	-0.5
-0.1564	-0.1580	-0.1564	0.009969	-0.5
$-0.3140.10^{-6}$	$-0.1814.10^{-3}$	$-0.3140.10^{-6}$	.	-0.5
0.1564	0.1571	0.1564	0.004190	-0.1871
0.3090	0.3103	0.3090	0.004097	-0.1180
0.4540	0.4563	0.4540	0.005162	0.4080
0.5878	0.5883	0.5878	0.0009795	0.5878
0.7071	0.7071	0.7071	0.0	0.7071
0.8090	0.8090	0.8090	0.0	0.8090
0.8910	0.8910	0.8910	0.0	0.8910
0.9511	0.9511	0.9511	0.0	0.9511
0.9877	0.9877	0.9877	0.0	0.9877
1.	1.	1.	0.0	1.

Tableau 2.1

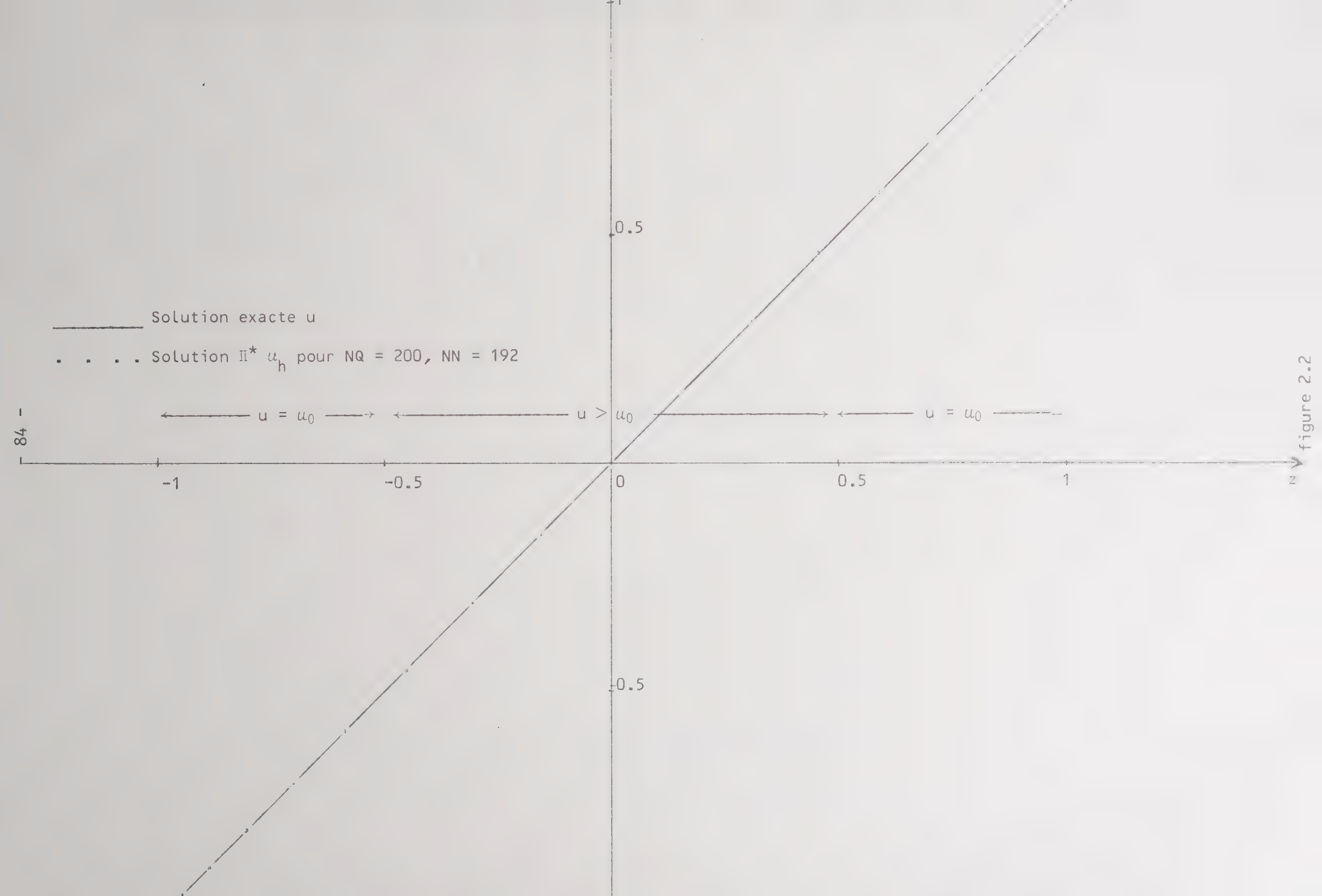

Solution exacte u
Solution Π* u_h pour NQ = 200, NN = 192
u = u_0
u > u_0
u = u_0
-1
-0.5
0
0.5
1
0.5
0.5

figure 2.2

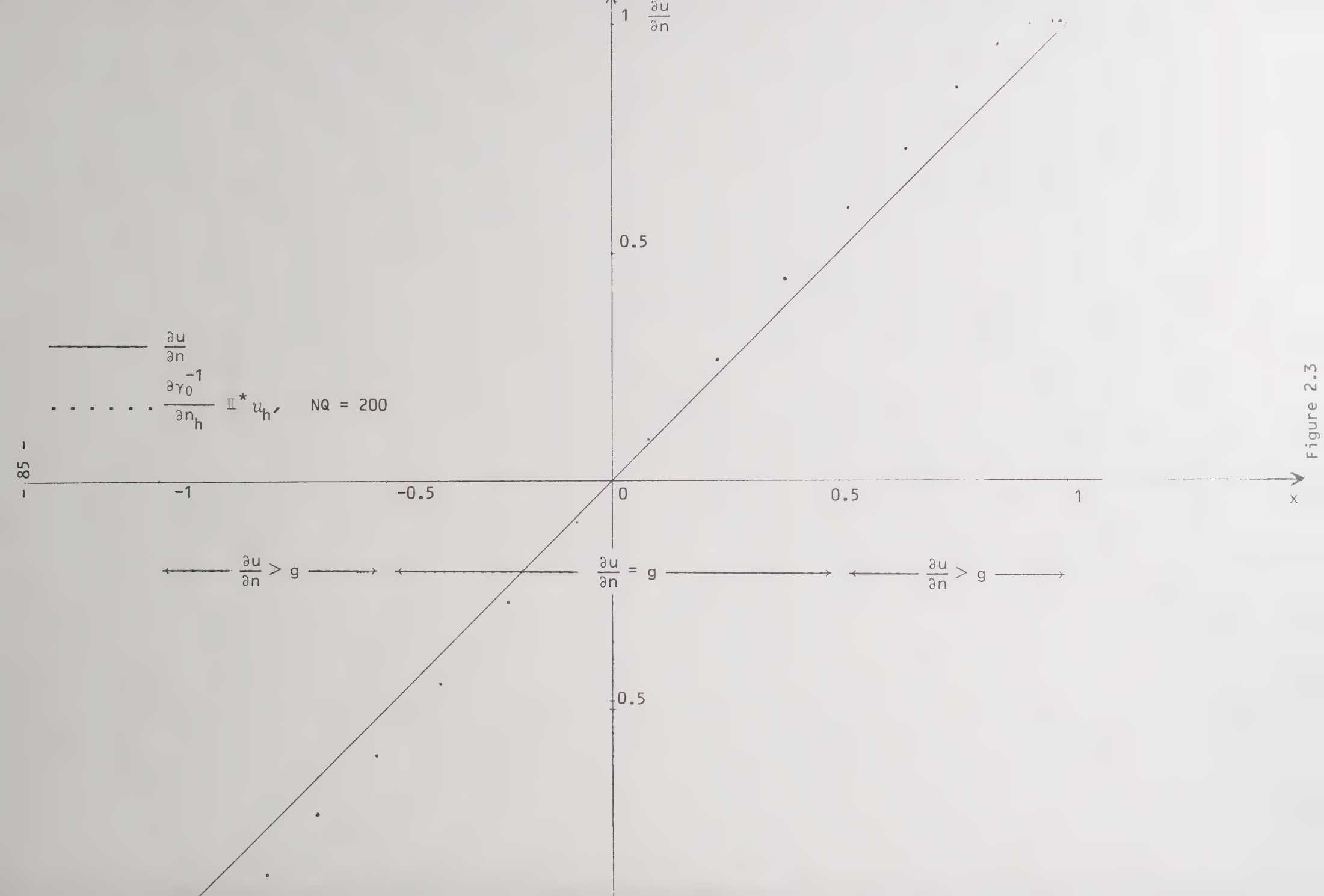

1
$\frac{\partial u}{\partial n}$
0.5
$\frac{\partial u}{\partial n}$
$\frac{\partial \gamma_0^{-1}}{\partial n_h} \mathbb{I}^* u_h$, NQ = 200
-1
-0.5
0
0.5
1
x
$\frac{\partial u}{\partial n} > g$
$\frac{\partial u}{\partial n} = g$
$\frac{\partial u}{\partial n} > g$
0.5

Figure 2.3

Exemple 3

$$u_0(x,y,z) = \begin{cases} -1 & \text{si } z \leq 0 \\ 3z^2-1 & \text{si } z > 0 \end{cases}$$

$$G(x,y,z) = \begin{cases} 6z^2-2 & \text{si } z \leq 0 \\ -10z^2-2 & \text{si } z > 0 \end{cases}$$

La solution exacte du problème est $u(x,y,z) = 2z^2 - x^2 - y^2$, donc

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,y,z)\Big|_\Gamma = 6z^2 - 1 \ .$$

On fait le même travail que dans l'Exemple 1. Pour NQ = 200, NN = 192, l'algorithme de relaxation converge au bout de 164 itérations avec OME = 1.7 (et le test d'arrêt à 10^{-6}). Les figures 3.1, 32., 3.3 et les tableaux 3.1, 3.2 jouent les mêmes rôles que les figures 1.1, 1.2, 1.3 et les tableaux 1.1, 1.2, respectivement.

Coordonnée de a_i selon l'axe z	$\Pi^* u_h(a_i)$	$u(a_i)$	$\lvert u(a_i) - \Pi^* u_h(a_i)\rvert / \lvert u(a_i)\rvert$	$u_0(a_i)$
-1	1.6	2.	0.1998	-1.
-0.9511	1.732	1.714	0.01071	-1.
-0.8090	0.7892	0.9635	0.1809	-1.
-0.5878	0.01470	0.03647	.	-1.
-0.3090	-0.8295	-0.7135	0.1626	-1.
$-.3140.10^{-6}$	-1.	-1.	0.0	-1.
0.3090	-0.7135	-0.7135	0.0	-0.7135
0.5878	0.03647	0.03647	0.0	0.3647
0.8090	0.9635	0.9635	0.0	0.9636
0.9511	1.714	1.714	0.0	1.714
1.	2.	2.	0.0	2.

Tableau 3.1

_____ Solution exacte u

. . . . . Solution $\Pi^* u_h$

pour NQ = 100
NN = 92

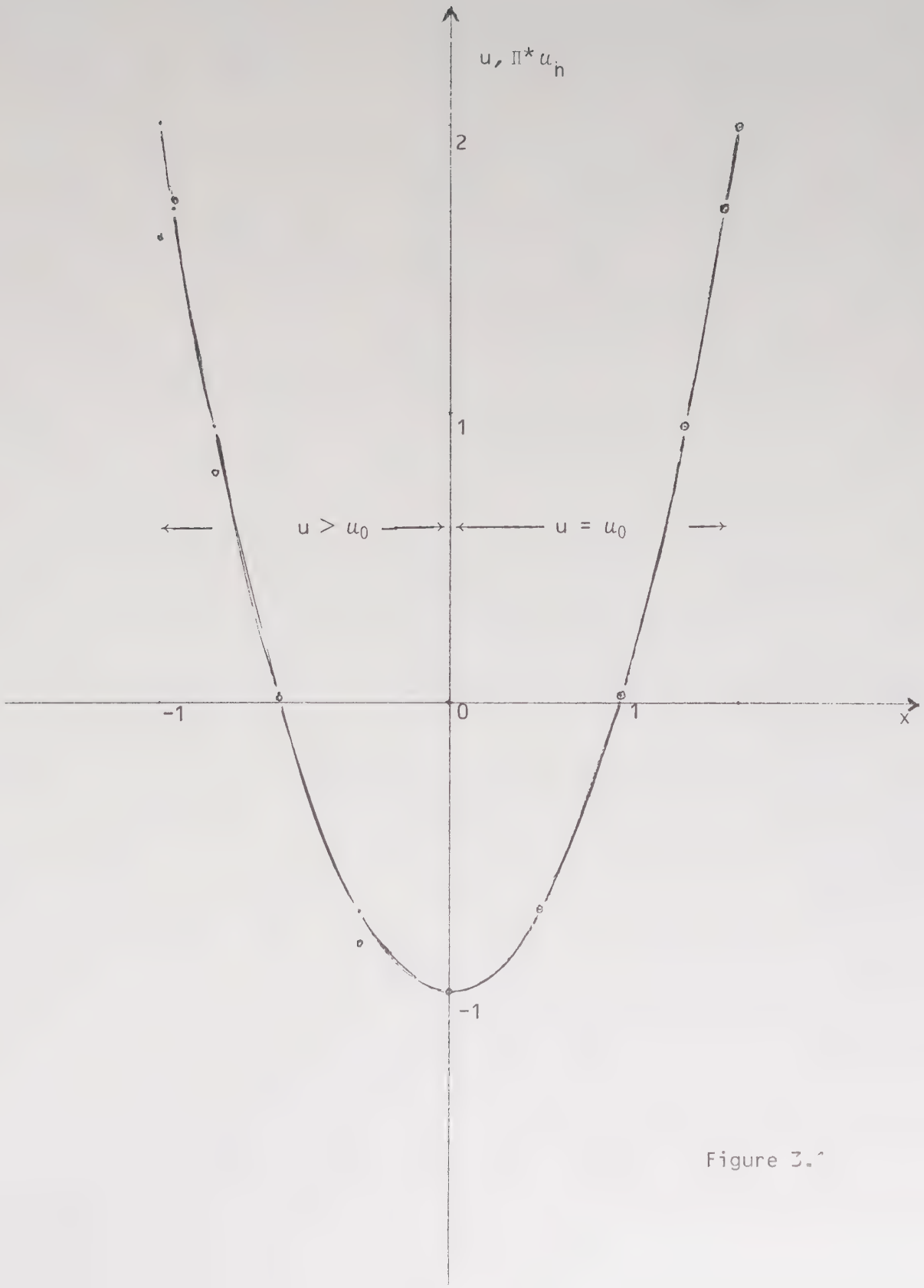


Figure 3.

Coordonnée de a_i selon l'axe z	$\Pi^* U_h(a_i)$	$U(a_i)$	$\lvert U(a_i) - \Pi^* U_h(a_i) \rvert / \lvert U(a_i) \rvert$	$u_0(a_i)$
-1.	1.903	2.	0.04870	-1.
-0.9877	1.852	1.927	0.03877	-1.
-0.9511	1.638	1.714	0.04414	-1.
-0.8910	1.309	1.382	0.05279	-1.
-0.8090	0.9024	0.9635	0.06347	-1.
-0.7071	0.4380	0.5	0.1239	-1.
-0.5878	$-.6997.10^{-2}$	$.3647.10^{-1}$	.	-1.
-0.4540	-0.4300	-0.3817	0.1265	-1.
-0.3090	-0.7390	-0.7135	0.03567	-1.
-0.1564	-0.9591	-0.9266	0.03511	-1.
$-0.3140.10^{-6}$	-1.	-1.	0.0	-1.
0.1564	-0.9266	-0.9266	0.0	-0.9266
0.3090	-0.7135	-0.7135	0.0	-0.7135
0.4540	-0.3817	-0.3818	0.0	-0.3817
0.5878	$0.3647.10^{-1}$	$0.3647.10^{-1}$	0.0	$0.3647.10^{-1}$
0.7071	0.5	0.5	0.0	0.5
0.8090	0.9635	0.9635	0.0	0.9635
0.8910	1.382	1.382	0.0	1.382
0.9511	1.714	1.714	0.0	1.714
0.9877	1.927	1.927	0.0	1.927
1.	2.	2.	0.0	2.

Tableau 3.2

_____ Solution exacte u

. . . . . Solution $\Pi^* u_h$

pour NQ = 200
NN = 192

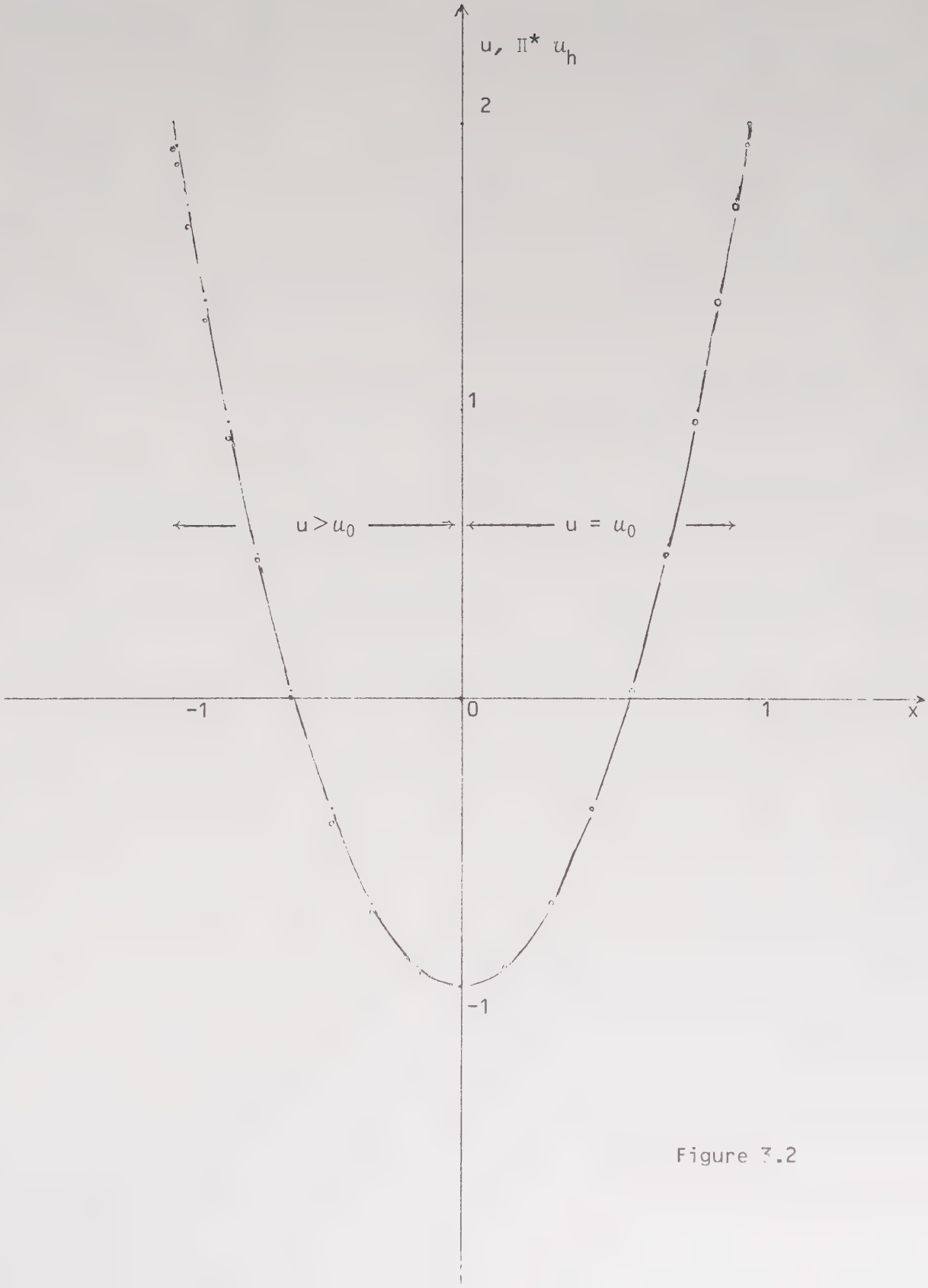


Figure 3.2

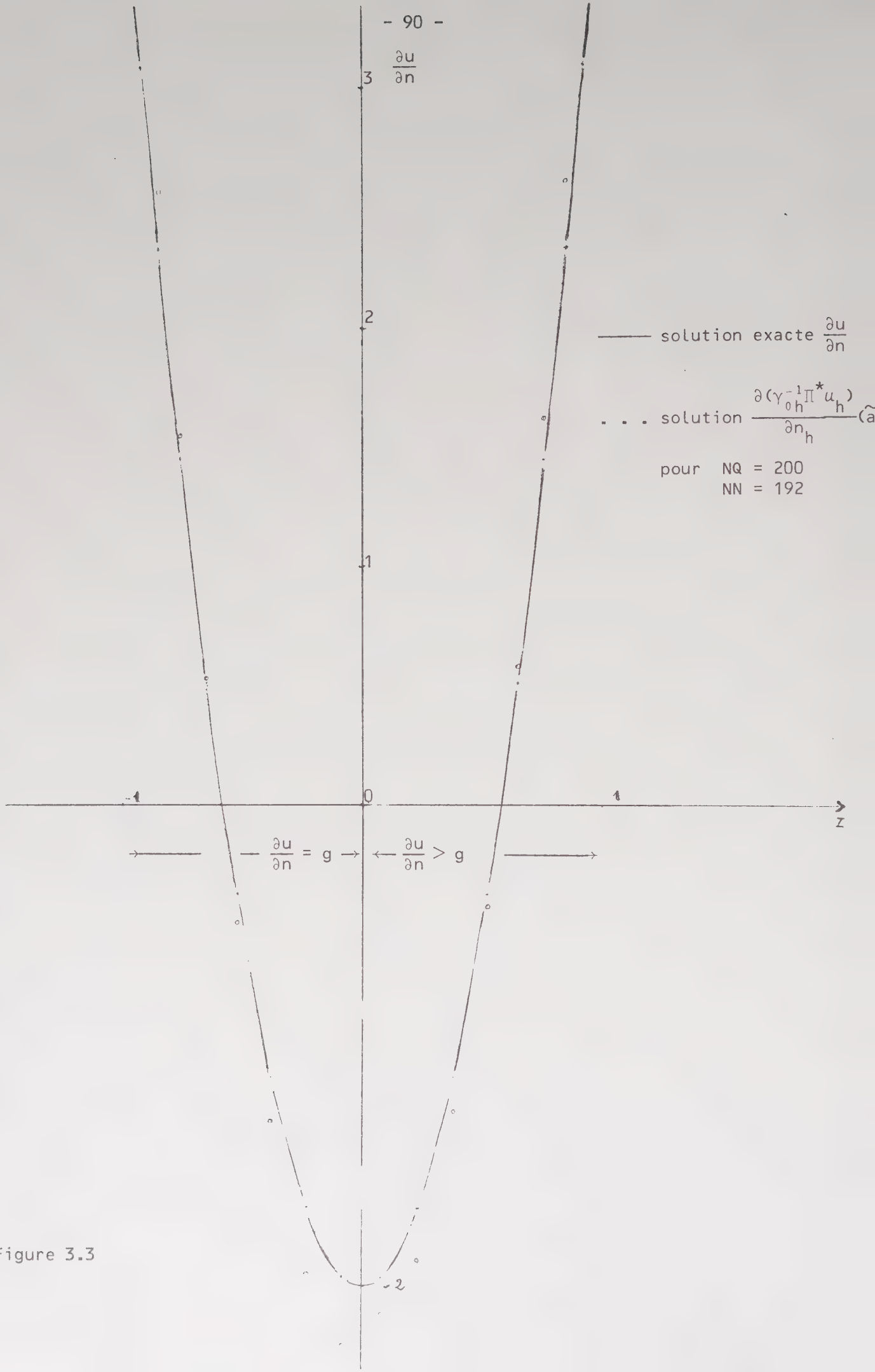

$\frac{\partial u}{\partial n}$
3
2
1
0
-1
1
z
—— solution exacte $\frac{\partial u}{\partial n}$
. . . solution $\frac{\partial(\gamma_{0h}^{-1}\Pi^* u_h)}{\partial n_h}$
pour NQ = 200
NN = 192
$\frac{\partial u}{\partial n} = g$
$\frac{\partial u}{\partial n} > g$
-2

Figure 3.3

Exemple 4

$$u_0(x,y,z) = \begin{cases} -y^2 - z^2 & \text{si } x < 0 \\ 2x^2 - y^2 - z^2 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$G(x,y,z) = \begin{cases} 4x^2 - 2y^2 - 2z^2 & \text{si } x < 0 \\ -2y^2 - 2z^2 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

La solution exacte est $u(x,y,z) = 2x^2 - y^2 - z^2$ d'où l'on tire

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,y,z)\Big|_\Gamma = 4x^2 - 2y^2 - 2z^2 .$$

On résoud le problème approché de la même manière que dans les exemples précédents, mais seulement dans le cas NQ = 209, NN = 192.

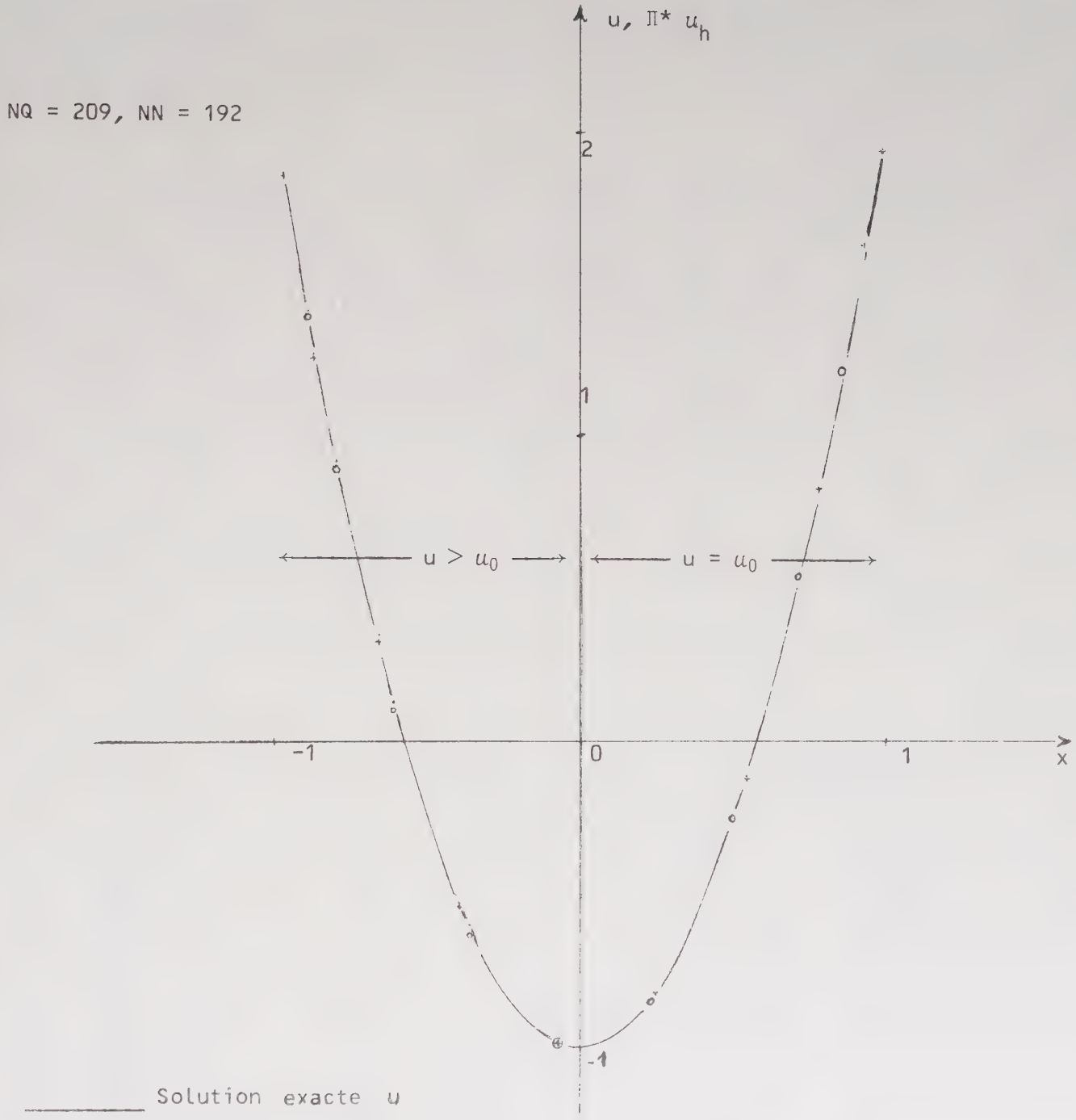
Les tableaux 4.1, 4.2 comparent les valeurs de u et $\pi^* u_h$ respectivement, aux noeuds situés sur la moitié du parallèle où se trouve le maximum de l'erreur relative $\dfrac{|u(a_i) - \pi^* u_h(a_i)|}{|u(a_i)|}$ et sur la moitié du "plus grand" parallèle (les valeurs sur les autres moitiés sont identiques). La Figure 4.1 donne l'allure de $\pi^* u_h$ par rapport à u .

Coordonnée de a_i selon l'axe $\vec{z}$	$\Pi^* U_h(a_i)$	$U(a_i)$	$\lvert U(a_i) - \Pi^* U_h(a_i)\rvert / \lvert U(a_i)\rvert$	$u_0(a_i)$
-0.8972	1.397	1.415	0.01284	-0.1950
-0.8	0.8893	0.9200	0.03336	-0.3600
-0.6161	0.1017	0.1387	0.26640	-0.6204
-0.3654	-0.6327	-0.5995	0.05543	-0.8665
-0.07512	-0.9944	-0.9831	0.01147	-0.9944
0.2233	-0.8504	-0.8504	0.0.	-0.8504
0.4975	-0.2574	-0.2574	0.0.	-0.2574
0.7178	0.5458	0.5458	0.0.	0.5458
0.8603	1.221	1.221	0.0.	1.221

Tableau 4.1

Coordonnée de a_i selon l'axe $\vec{z}$	$\Pi^* U_h(a_i)$	$U(a_i)$	$\lvert U(a_i) - \Pi^* U_h(a_i)\rvert / \lvert U(a_i)\rvert$	$u_0(a_i)$
-0.9763	1.854	1.860	0.002941	-0.0468
-0.8705	1.260	1.273	0.01050	-0.2422
-0.6704	0.3342	0.3483	0.04043	-0.5506
-0.3976	-0.5419	-0.5257	0.03083	-0.8419
-0.8174	-0.9933	-0.9800	0.01363	-0.9933
0.2430	-0.8229	-0.8229	0.0	-0.8229
0.5414	-0.1207	-0.1207	0.0	-0.1207
0.7811	0.8304	0.8304	0.0	0.8304
0.9362	1.629	1.629	0.0	1.629
0.9898	1.939	1.939	0.0	1.939

Tableau 4.2



_____ Solution exacte u

. . . . . Solution $\Pi^* u_h$ aux noeuds du 1/2 parallèle où se situe le maximum de l'erreur relative

+ + + + + Solution $\Pi^* u_h$ aux noeuds du 1/2 parallèle moitié du plus grand parallèle

Figure 5.1

Exemple 5

$$u_0(x,y,z) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ x-x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad G(x,y,z) = \begin{cases} x-x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La solution exacte est $u(x,y,z) = x$, donc $\frac{\partial u}{\partial n}(x,y,z)\big|_\Gamma = X$.

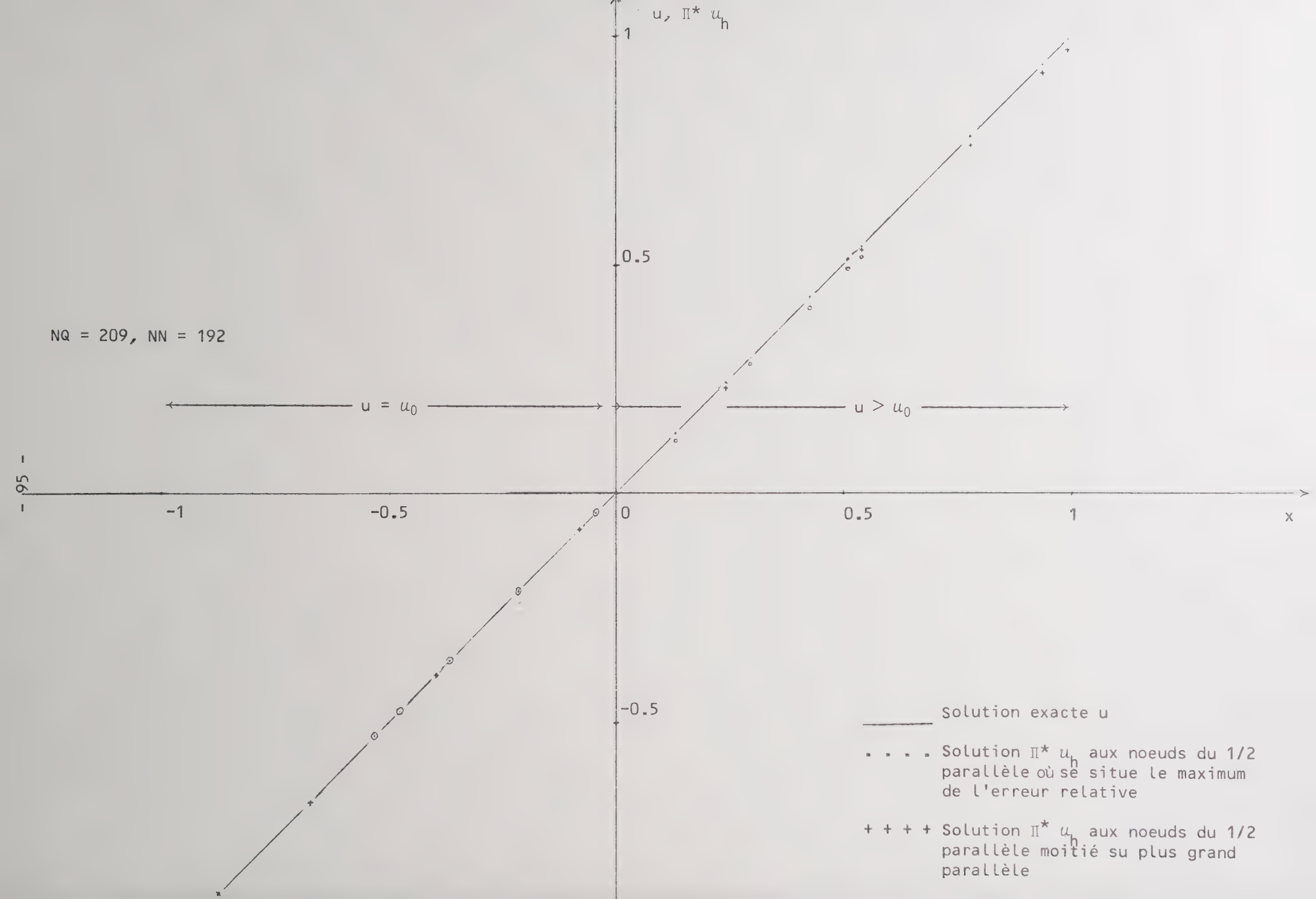
On procède comme dans l'Exemple 4, les tableaux 5.1 et 5.2 jouant le même rôle que 4.1 et 4.2 respectivement. La figure 5.1 donne l'allure de $\pi^* u_h$ par rapport à u .

Coordonnée de a_i selon l'axe z	$\pi^* U_h(a_i)$	$U(a_i)$	$\lvert U(a_i) - \pi^* U_h(a_i)\rvert / \lvert U(a_i)\rvert$	$u_0(a_i)$
-0.5333	-0.5333	-0.5333	0.0	-0.5333
-0.4755	-0.4755	-0.4755	0.0	-0.4755
-0.3662	-0.3662	-0.3662	0.0	-0.3662
-0.2172	-0.2172	-0.2172	0.0	-0.2172
-0.04465	-0.04465	-0.04465	0.0	-0.04465
-0.1327	0.1172	0.1327	0.11673	0.1151
0.2957	0.2819	0.2957	0.04676	0.2083
0.4266	0.4063	0.4266	0.04761	0.2446
0.5113	0.4909	0.5113	0.04006	0.2499
0.5406	0.5182	0.5406	0.04148	0.2483

Tableau 5.1

Coordonnée de a_i selon l'axe z	$\pi^* U_h(a_i)$	$U(a_i)$	$\lvert U(a_i) - \pi^* U_h(a_i)\rvert / \lvert U(a_i)\rvert$	$u_0(a_i)$
-0.9763	-0.9763	-0.9763	0.0	-0.9763
-0.8705	-0.8705	-0.8705	0.0	-0.8705
-0.6704	-0.6704	-0.6704	0.0	-0.6704
-0.3976	-0.3976	-0.3976	0.0	-0.3976
-0.08174	-0.08174	-0.08174	0.0	-0.08174
0.2430	0.2296	0.2430	0.05515	0.1839
0.5414	0.5319	0.5414	0.01747	0.2483
0.7811	0.7598	0.7811	0.02723	0.1710
0.9362	0.9198	0.9362	0.01747	0.05974
0.9898	0.9647	0.9898	0.02542	0.01007

Tableau 5.2


u, Π* u_h
1
0.5
-0.5
NQ = 209, NN = 192
u = u_0
u > u_0
-1
-0.5
0
0.5
1
x
Solution exacte u
Solution Π* u_h aux noeuds du 1/2 parallèle où se situe le maximum de l'erreur relative
Solution Π* u_h aux noeuds du 1/2 parallèle moitié su plus grand parallèle

III.3 - EXEMPLES QUAND Ω EST UN ELLIPSOIDE

Dans toute la suite,

$$\Omega = \left\{(x,y,z)) \; ; \; x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} < 1\right\} \quad ; \; \Gamma = \partial\Omega = \left\{(x,y,z) \; ; \; x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1\right\} \; ;$$

et l'on cherche u solution de

$$\left\{\begin{array}{l} -\Delta u = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \; ; \\ u-u_0 \geqslant 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} - G \geqslant 0 \\ (u-u_0)\left(\dfrac{\partial u}{\partial n} - G\right) = 0 \end{array}\right\} \text{sur} \quad \Gamma \; .$$

Exemple 6

On se donne

$$u_0(x,y,z) = \left\{\begin{array}{ll} z-z^2 & \text{si} \quad z \leqslant 0 \\ z & \text{si} \quad z > 0 \end{array}\right.$$

$$G(x,y,z) = \frac{1}{4\sqrt{x^2+y^2+z^2/16}} \quad \left\{\begin{array}{ll} z & \text{si} \quad z \leqslant 0 \\ z-200\ z^2 & \text{si} \quad z > 0 \end{array}\right.$$

La solution exacte est $u(x,y,z) = z$, de dérivée normale

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,y,z)\Big|_\Gamma = \frac{z^2}{4\sqrt{x^2+y^2+z^2/16}} \; .$$

La résolution de (2.17) donne $\pi^* u_h(a_i)$, $1 \leqslant i \leqslant NN$ et (2.11) donne

$$\frac{\partial \gamma_{0h}^{-1}\pi^* u_h}{\partial n_h}(\tilde{a}_\ell) = \sum_{i=1}^{NN} \pi^* u_h(a_i) \, \frac{\partial \pi^* v_h^i}{n_h}(\tilde{a}_\ell), \; (\tilde{a}_\ell)_{1 \leqslant \ell \leqslant NQ} \; ,$$

comme dans l'Exemple 1.

Pour NQ = 200, NN = 192, OME = 1.7, la relaxation converge en 94 itérations. Les tableaux 6.1, 6.2 comparent les valeurs de u et $\pi^* u_h$ aux noeuds d'un méridien pour NQ = 100, NN = 92 et NQ = 200, NN = 192, respectivement. La figure 6.1 donne l'allure de $\pi^* u_h$ quand NQ = 100, NQ = 200, et la figure 6.2 donne l'allure de $\dfrac{\partial \gamma_{0h}^{-1}\pi^* u_h}{\partial n_h}$.

Coordonnée de a_i selon l'axe $\vec{z}$	$\Pi^* U_h(a_i)$	$U(a_i)$	$\lvert U(a_i) - \Pi^* U_h(a_i)\rvert / \lvert U(a_i)\rvert$	$u_0(a_i)$
-2.	-1.886	-2.	0.05717	-6.
-1.902	-1.966	-1.902	0.03364	-5.520
-1.618	-1.618	-1.618	$0.766.10^{-5}$	-4.236
-1.176	-1.213	-1.176	0.03200	-2.558
-0.6180	-0.6282	-0.6180	0.01647	-1.
$-0.6280.10^{-6}$	$-0.6280.10^{-6}$	$-0.6280.10^{-6}$	$0.5431.10^{-6}$	$-0.6280.10^{-6}$
0.6180	0.6180	0.6180	0.0.	0.6180
1.176	1.176	1.176	0.0.	1.176
1.618	1.618	1.618	0.0.	1.618
1.902	1.902	1.902	0.0.	1.902
2.	2.	2.	0.0.	2.

Tableau 6.1

Coordonnée de a_i selon l'axe $\vec{z}$	$\Pi^* U_h(a_i)$	$U(a_i)$	$\lvert U(a_i) - \Pi^* U_h(a_i)\rvert / \lvert U(a_i)\rvert$	$u_0(a_i)$
-2.	-1.986	-2.	0.00688	-6.
-1.975	-1.2059	-1.975	0.04237	-5.877
-1.902	-1.934	-1.902	0.01660	-5.520
-1.782	-1.851	-1.782	0.03857	-4.958
-1.618	-1.652	-1.618	0.0210	-4.236
-1.414	-1.471	-1.414	0.0400	-3.414
-1.176	-1.204	-1.176	0.02428	-2.2558
-0.908	-0.9499	-0.908	0.04612	-1.732
-0.618	-0.6347	-0.618	0.02696	-1.
-0.3129	-0.3362	-0.3129	0.07468	-0.4108
$-0.628.10^{-6}$	$-0.6280.10^{-6}$	$-0.628.10^{-6}$	$0.543.10^{-6}$	$-0.628.10^{-6}$
0.3129	0.3129	0.3129	0.0	0.3129
0.618	0.618	0.618	0.0	0.618
0.908	0.908	0.908	0.0	0.908
1.176	1.176	1.176	0.0	1.176
1.414	1.414	1.414	0.0	1.414
1.618	1.618	1.618	0.0	1.618
1.782	1.782	1.782	0.0	1.782
1.902	1.902	1.902	0.0	1.902
1.975	1.975	1.975	0.0	1.975
2.	2.	2.	0.0	2.

Tableau 6.2

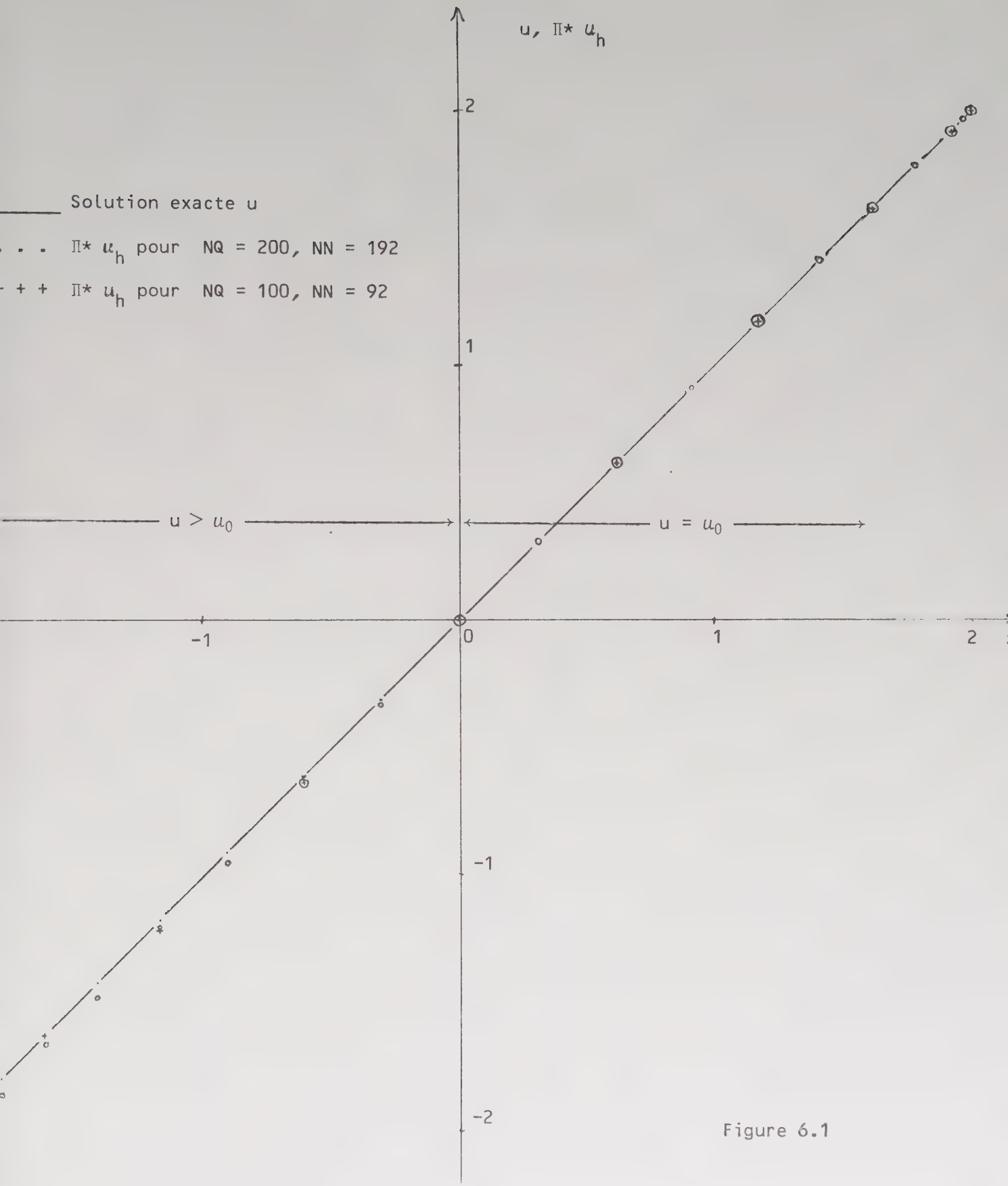

u, Π* u_h
2
1
-1
0
1
2
-1
-2
u > u_0
u = u_0
Solution exacte u
. . . Π* u_h pour NQ = 200, NN = 192
+ + Π* u_h pour NQ = 100, NN = 92

Figure 6.1

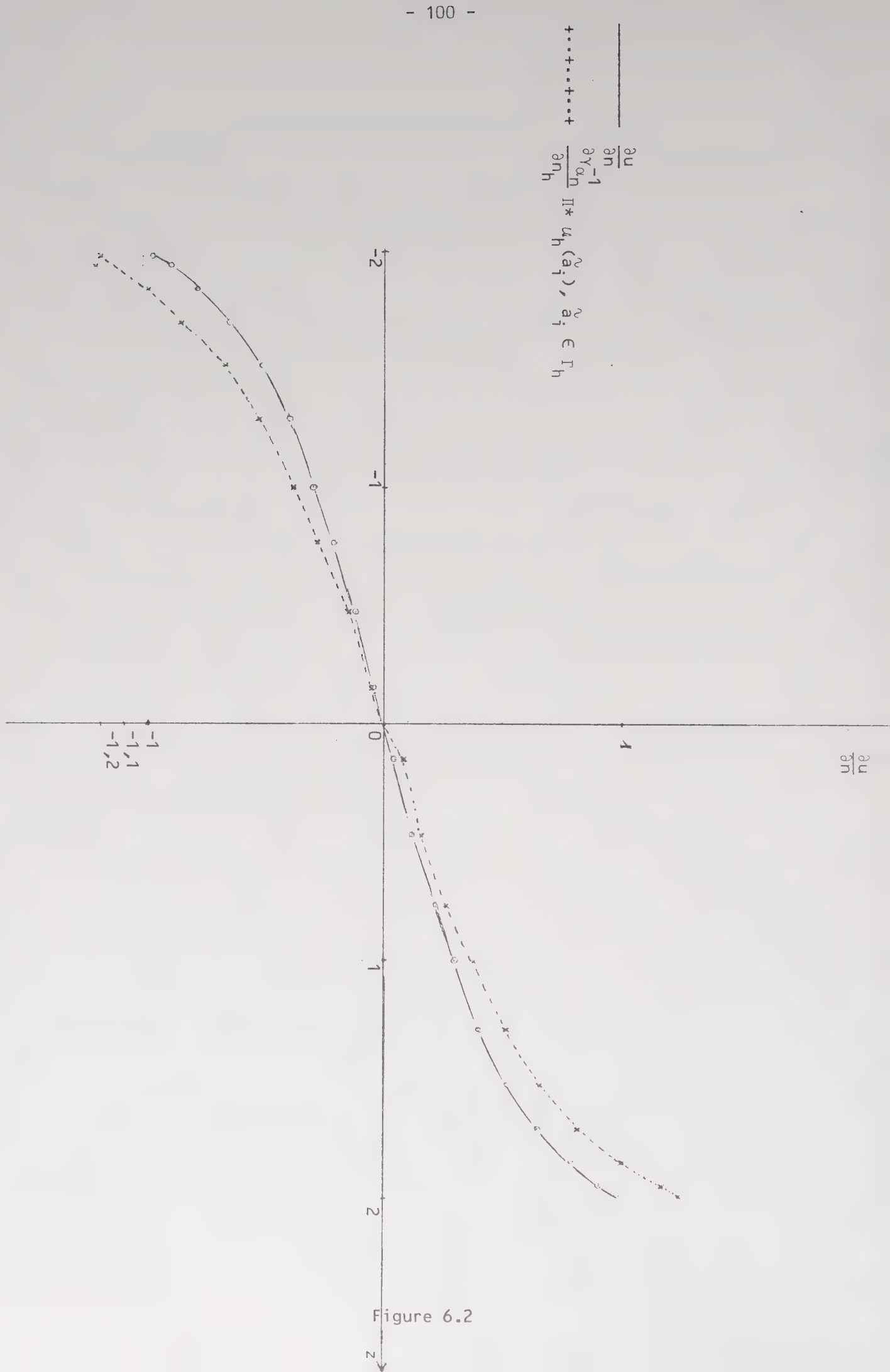

$\frac{\partial u}{\partial n}$
$\frac{\partial u_h}{\partial \gamma_h^{-1}} \quad \Pi^* u_h(\tilde{a}_i), \tilde{a}_i \in \Gamma_h$
$\frac{\partial u}{\partial n}$
-2
-1
0
1
2
z
-1
-1,1
-1,2
1

Figure 6.2

Exemple 7

$$u_0(x,y,z) = \begin{cases} z & \text{si} \quad |z| \geq 1 \\ -1 & \text{si} \quad 1 \leq z \leq 0 \\ 2z-1 & \text{si} \quad 0 < z \leq 1 \end{cases}$$

et

$$G(x,y,z) = \frac{1}{4\sqrt{x^2+y^2+z^2/16}} \begin{cases} z-(z+1)^2 & \text{si} \quad z \leq -1 \\ z & \text{si} \quad -1 \leq z \leq 1 \\ z-(z-1)^2 & \text{si} \quad 1 \leq z \end{cases}$$

La solution exacte du problème est encore $u(x,y,z) = z$ et

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,y,z)\Big|_\Gamma = \frac{z}{4\sqrt{x^2+y^2+z^2/16}} .$$

Pour NQ = 200, NN = 192, OME = 1.7 et le test d'arrêt à 10^{-6} , l'algorithme de relaxation converge en 98 itérations.

Les tableaux 7.1 et 7.2 comparent les valeurs calculées de $\pi^* u_h$ et u aux noeuds d'un méridien donné pour NQ = 100, NN = 92 et NQ = 200, NN = 192. Les figures 7.1 et 7.2 donnent l'allure de $\pi^* u_h$ dans ces deux cas. Par contre, la figure 7.3 donne l'allure de $\dfrac{\partial \gamma_{0h}^{-1} \pi^* u_h}{\partial n_h}$; $\tilde{a}_i \in \Gamma_h$ sont les barycentres des éléments compris entre deux méridiens donnés.

Coordonnée de a_i selon l'axe z	$\pi^* u_h(a_i)$	$u(a_i)$	$\lvert u(a_i) - \pi^* u_h(a_i)\rvert / \lvert u(a_i)\rvert$	$u_0(a_i)$
-2.	-2.	-2.	0.0.	-2.
-1.902	-1.902	-1.902	0.0.	-1.902
-1.618	-1.618	-1.618	0.0.	-1.618
-1.176	-1.176	-1.176	0.0.	-1.176
-0.6180	-0.6248	-0.6180	0.01096	-1.
$-0.628.10^{-6}$	$-0.110.10^{-2}$	$-0.628.10^{-6}$	.	-1.
0.6180	0.6234	0.6180	0.00867	0.2361
1.176	1.176	1.176	0.0.	1.176
1.618	1.618	1.618	0.0.	1.618
1.902	1.902	1.902	0.0.	1.902
2.	2.	2.	0.0.	2.

Tableau 7.1

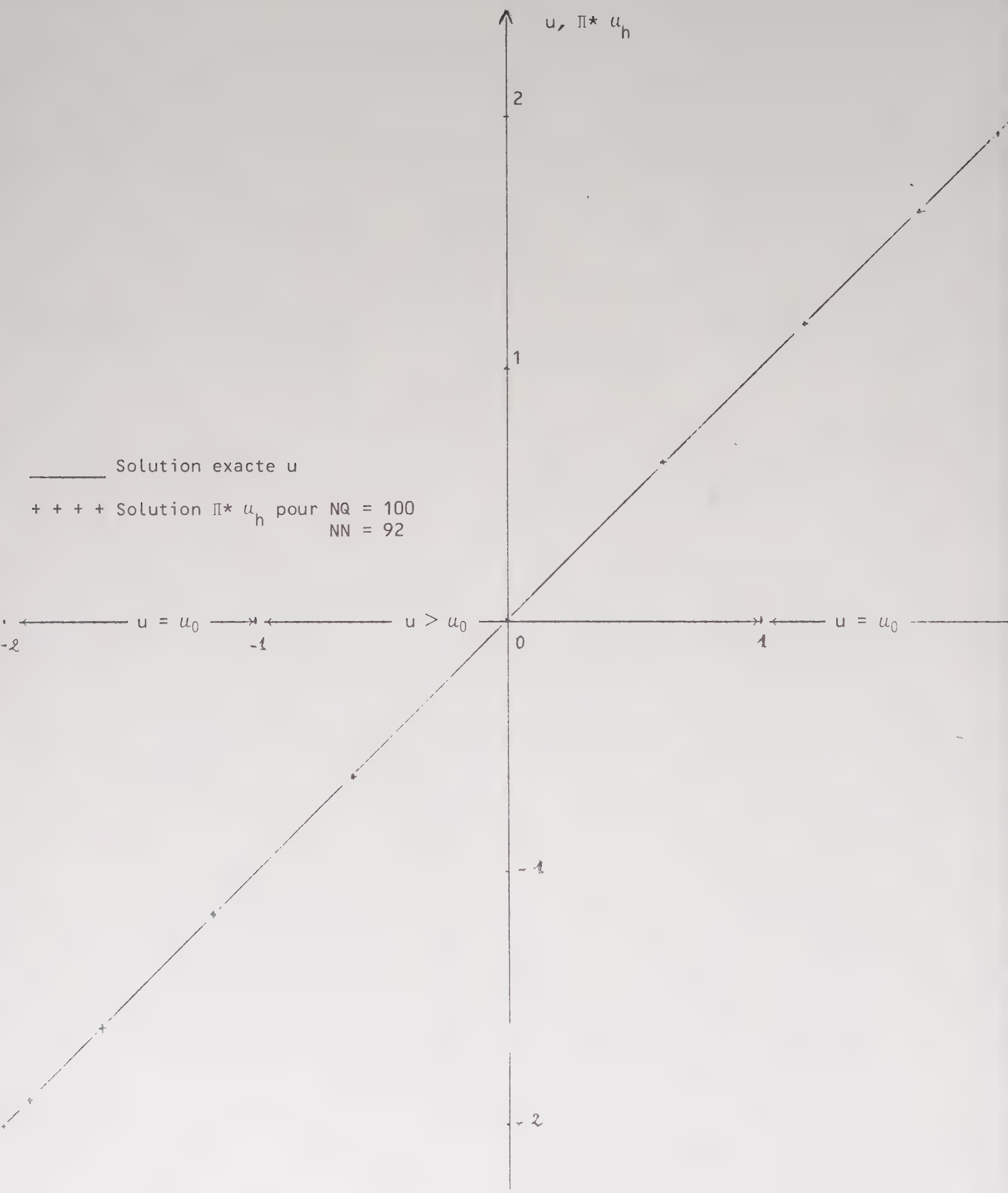

u, Π* u_h
2
1
Solution exacte u
+ + + + Solution Π* u_h pour NQ = 100
NN = 92
u = u_0
u > u_0
u = u_0
-2
-1
0
1
-1
-2

Figure 7.1

Coordonnée de a_i selon l'axe z	$\Pi^* U_h(a_i)$	$U(a_i)$	$\lvert U(a_i) - \Pi^* U_h(a_i) \rvert / \lvert U(a_i) \rvert$	$u_0(a_i)$
-2.	-2.	-2.	0.0	-2.
-1/975	-1.975	-1.975	0.0	-1.975
-1.902	-1.902	-1.902	0.0	-1.902
-1.782	-1.782	-1.782	0.0	-1.782
-1.618	-1.618	-1.618	0.0	-1.618
-1.414	-1.414	-1.414	0.0	-1.414
-1.176	-1.176	-1.176	0.0	-1.176
-0.980	-0.9143	-0.9080	0.00692	-1.
-0.618	-0.6207	-0.618	0.00432	-1.
-0.3129	-0.03161	-0.3129	0.01025	-1.
$-0.628.10^{-6}$	$0.93.10^{-4}$	$-0.628.10^{-6}$	.	-1.
0.3129	0.3151	0.3129	0.00716	-0.3743
0.618	0.6212	0.618	0.00514	0.2361
0.908	0.9133	0.903	0.00589	0.8160
1.176	1.176	1.176	$0.588.10^{-3}$	1.176
1.414	1.414	1.414	0.0	1.414
1.618	1.618	1.618	0.0	1.618
1.782	1.782	1.782	0.0	1.782
1.902	1.902	1.902	0.0	1.902
1.975	1.975	1.975	0.0	1.975
2.	2.	2.	0.0	2.

Tableau 7.2

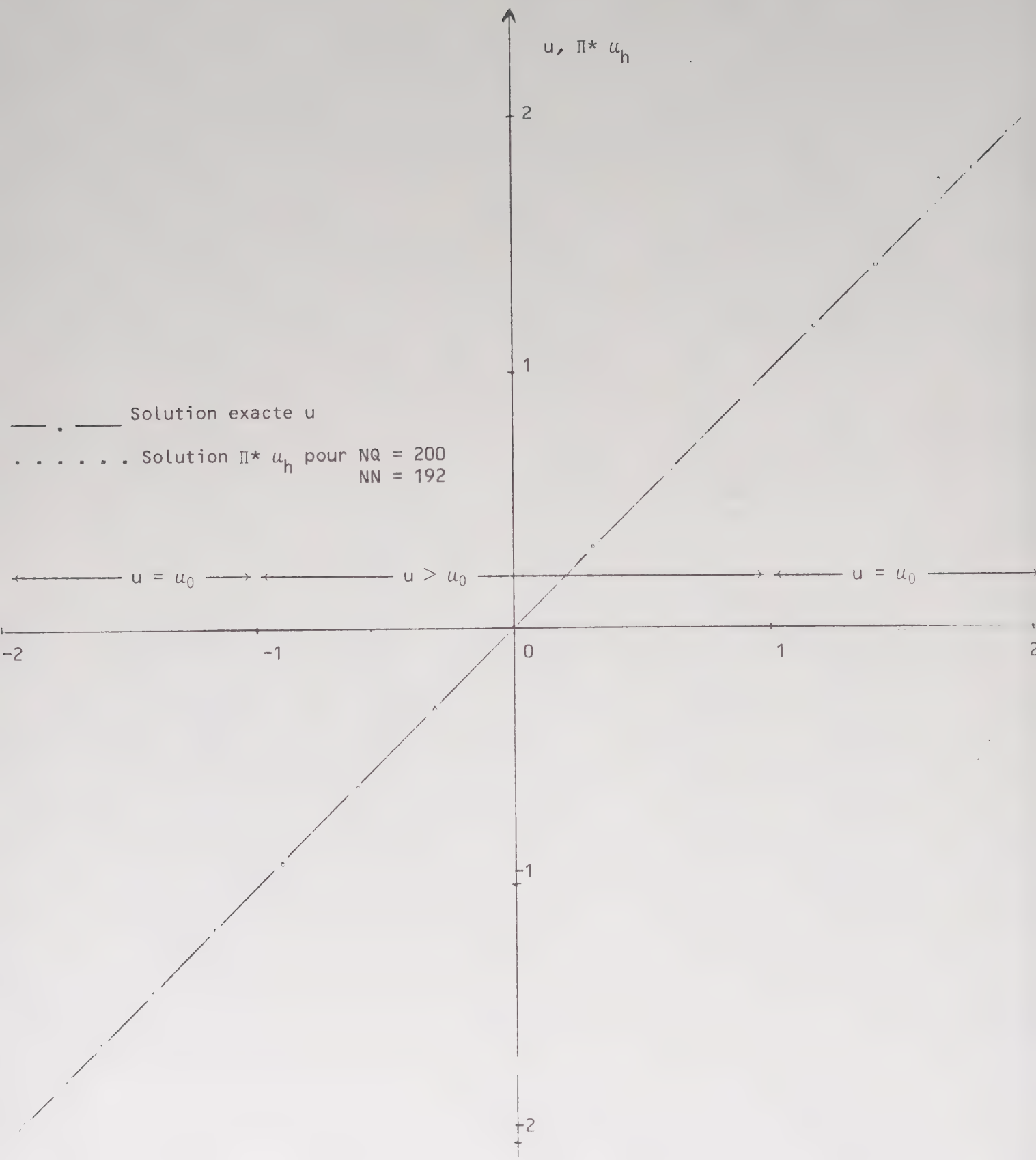

u, Π* u_h
2
1
-1
-2
-2
-1
0
1
2
Solution exacte u
Solution Π* u_h pour NQ = 200
NN = 192
u = u_0
u > u_0
u = u_0

Figure 7.2

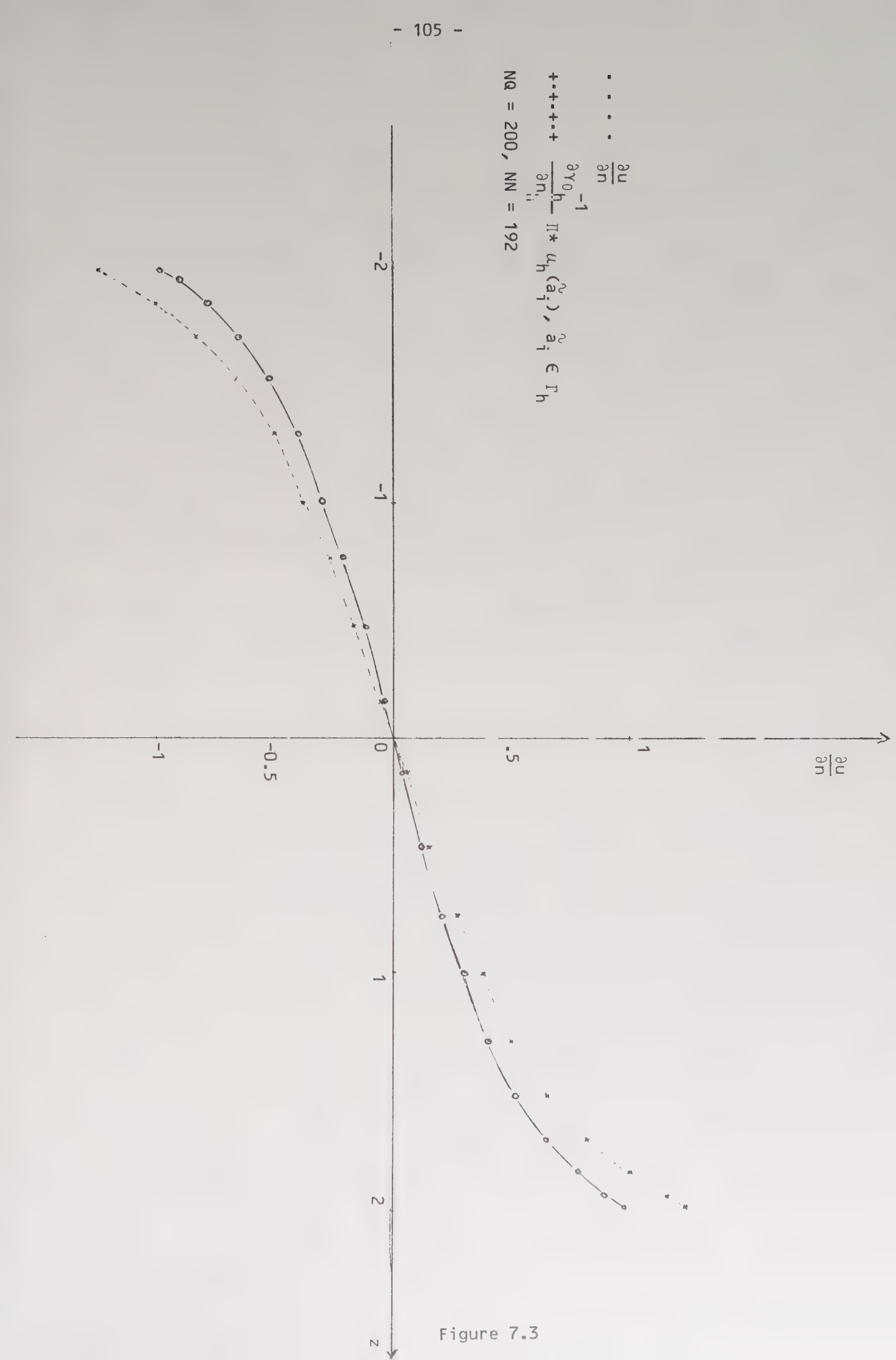

$\frac{\partial u}{\partial n}$
$\frac{\partial \gamma_0 h^{-1}}{\partial n_i}$ Π* $u_h(\tilde{a}_i)$, $\tilde{a}_i \in \Gamma_h$
NQ = 200, NN = 192
-2
-1
0
1
2
z
-1
-0.5
.5
1
$\frac{\partial u}{\partial n}$

Figure 7.3

Exemple 8

$$u_0(x,y,z) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad z \leq 0 \\ \frac{9}{4}z^2-1 & \text{si} \quad z > 0 \end{cases}$$

$$G(x,y,z) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2/16}} \begin{cases} 3z^2-4 & \text{si} \quad z \leq 0 \\ -z^2-4 & \text{si} \quad z > 0 \end{cases}$$

La solution exacte est alors $u(x,y,z) = 2z^2 - x^2 - y^2$, de dérivée normale

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,y,z) = \frac{z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2/16}} \ .$$

Avec les mêmes données que dans les cas précédents, l'algorithme de relaxation converge en 85 itérations.

Les tableaux 8.1 et 8.2 comparent $\pi^* u_h$ et u quand NQ = 100, NN = 92 et NQ = 200, NN = 192. La figure 8.1 donne l'allure de $\pi^* u_h$ quand NQ = 100, NN = 92, et NQ = 200, NN = 192, et la figure 8.2, l'allure de $\frac{\partial \gamma_{0h}^{-1} \pi^* u_h}{\partial n_h}$ dans des situations identiques à celles des exemples précédents.

Coordonnée de a_i selon l'axe $\vec{z}$	$\pi^* U_h(a_i)$	$U(a_i)$	$\lvert U(a_i) - \pi^* U_h(a_i) \rvert / \lvert U(a_i) \rvert$	$u_0(a_i)$
-2.	6.425	8.	0.19693	-1.
-1.902	7.454	7.141	0.04384	-1.
-1.618	4.332	4.891	0.11429	-1.
-1.176	2.145	2.109	0.01701	-1.
-0.6180	-0.5493	-0.10406	.	-1.
$-0.628.10^{-6}$	-1.	-1.	0.0	-1.
0.6180	-0.1406	-0.1406	0.0	-0.1406
1.176	2.109	2.109	0.0	2.109
1.618	4.891	4.891	0.0	4.891
1.902	7.141	7.141	0.0	7.141
2.	8.	8.	0.0	8.

Tableau 8.1

Coordonnée de a_i selon l'axe z	$\Pi^* U_h(a_i)$	$U(a_i)$	$\lvert U(a_i) - \Pi^* U_h(a_i) \rvert / \lvert U(a_i) \rvert$	$u_0(a_i)$
-2.	7.758	8.	0.03027	-1.
-1.975	7.809	7.780	0.00375	-1.
-1.902	7.063	7.141	0.01086	-1.
-1.782	6.133	6.145	0.00196	-1.
-1.618	4.835	4.891	0.01143	-1.
-1.414	3.450	3.500	0.01418	-1.
-1.176	2.047	2.109	0.02958	-1.
-0.908	0.7701	0.8550	0.09925	-1.
-0.618	-0.2004	-0.1406	.	-1.
-0.3129	-0.8658	-0.7798	0.11039	-1.
$-0.628.10^{-6}$	-1.	-1.	0.0	-1.
0.3129	-0.7798	-0.7798	0.0	-0.7798
0.618	-0.1406	-0.1406	0.0	-0.1406
0.908	0.8550	0.8550	0.0	0.8550
1.176	2.109	2.109	0.0	2.109
1.414	3.500	3.500	0.0	3.500
1.618	4.891	4.891	0.0	4.891
1.782	6.145	6.145	0.0	6.145
1.902	7.141	7.141	0.0	7.141
1.975	7.780	7.780	0.0	7.780
2.	8.	8.	0.0	8.

Tableau 8.2

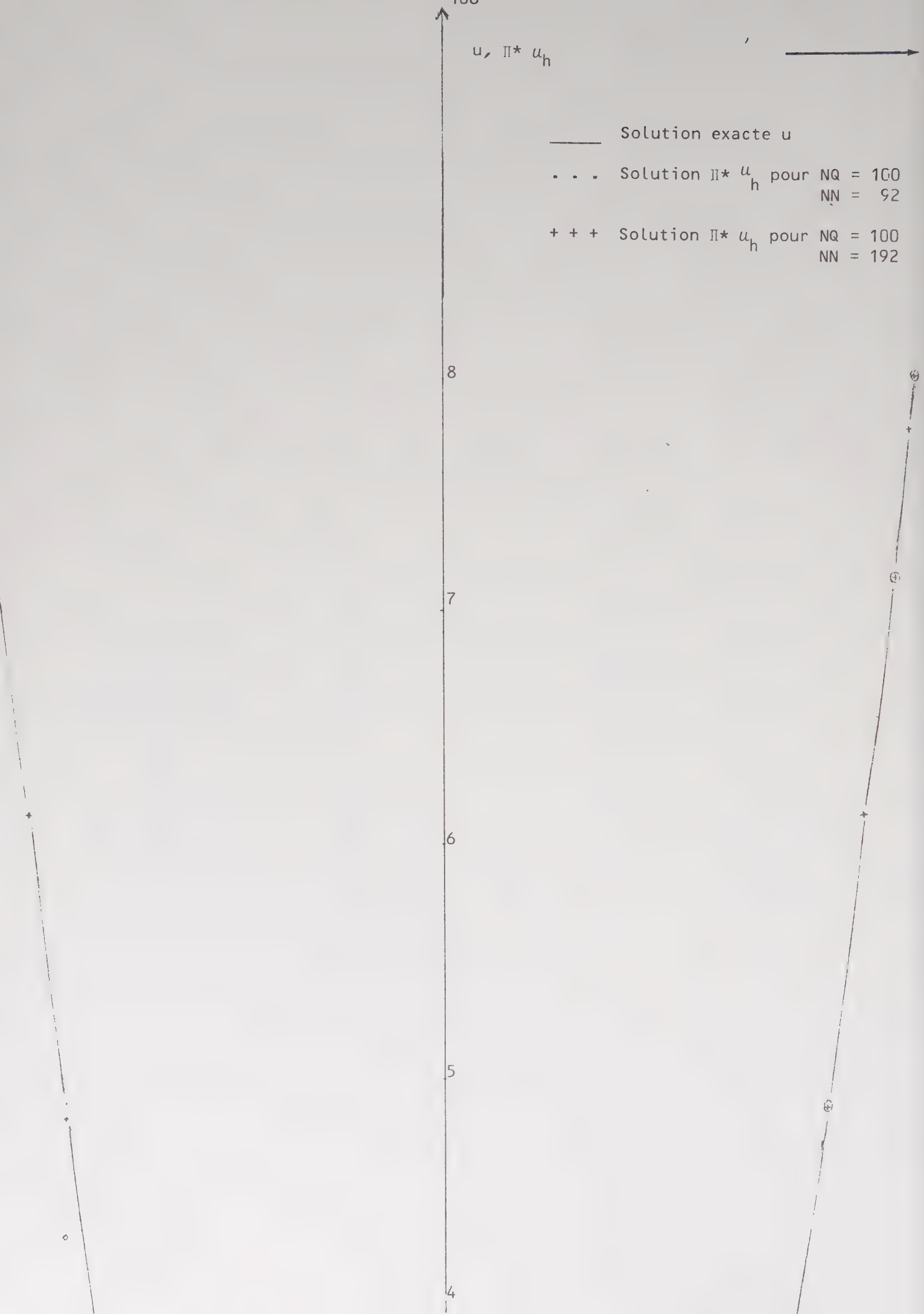

u, Π* u_h
Solution exacte u
Solution Π* u_h pour NQ = 100 NN = 92
Solution Π* u_h pour NQ = 100 NN = 192
8
7
6
5
4

Figure 8.1

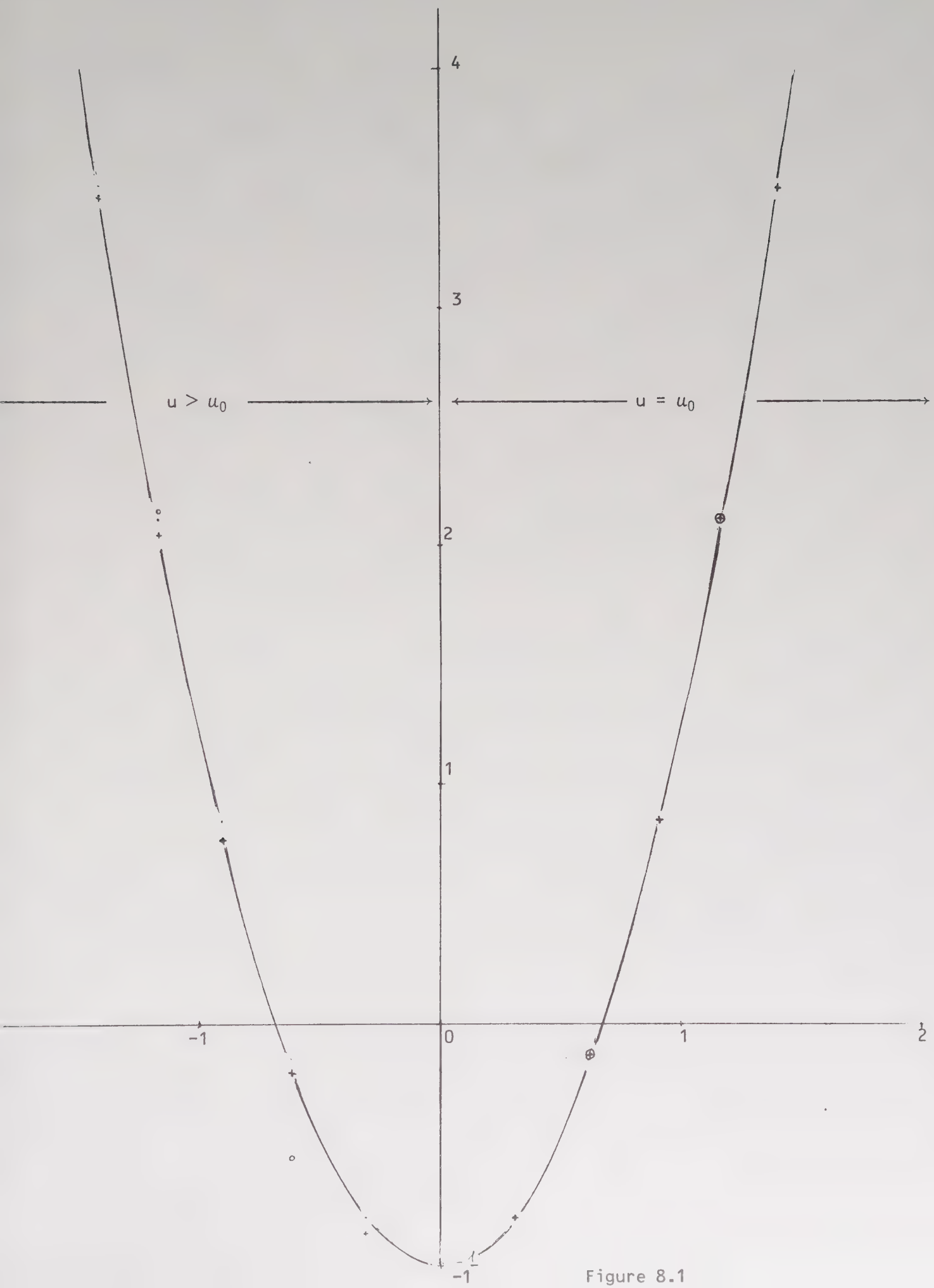


Figure 8.1

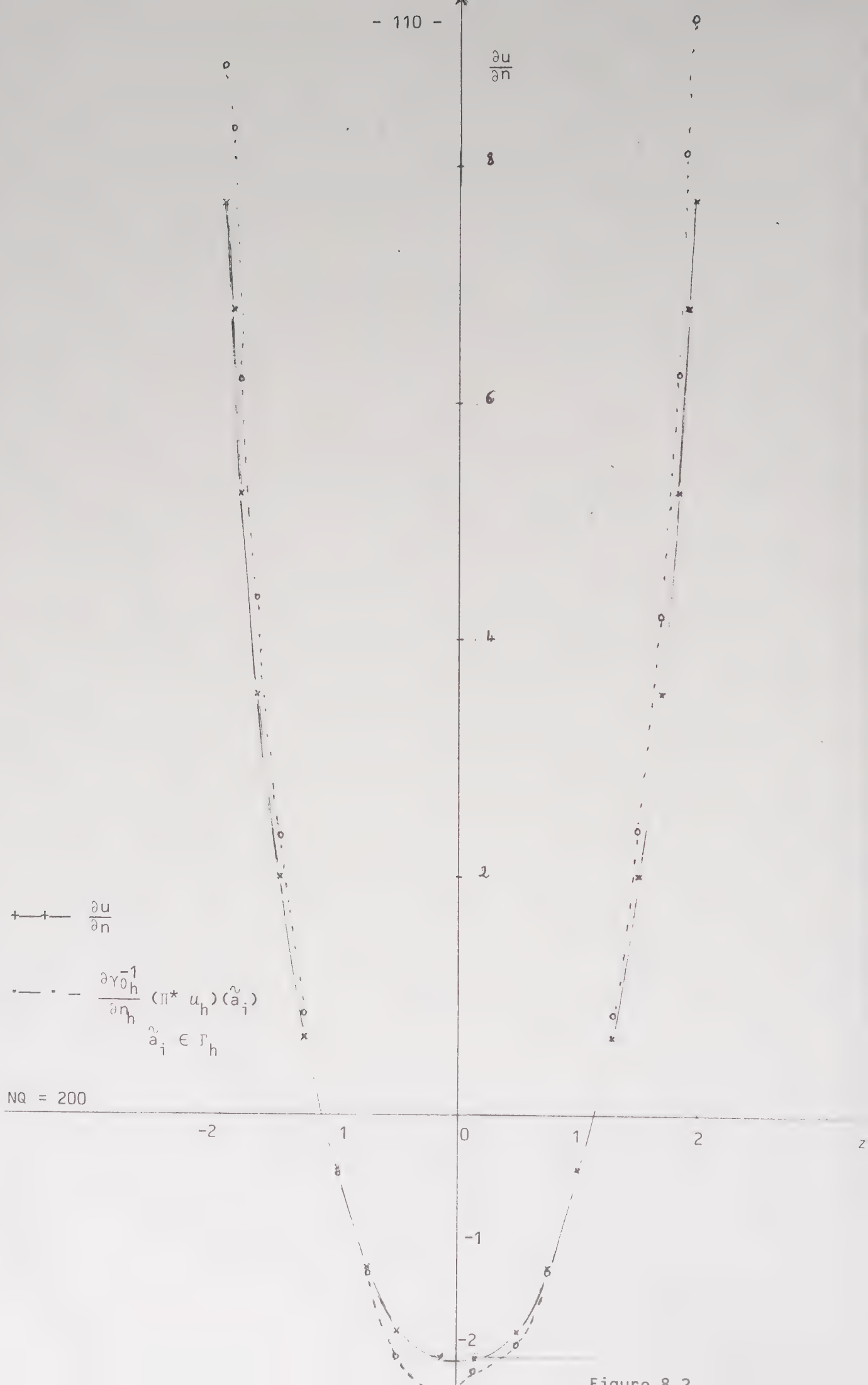

$\frac{\partial u}{\partial n}$
8
6
4
2
-1
-2
-2
1
0
1
2
z
+—+— $\frac{\partial u}{\partial n}$
·— · — $\frac{\partial \gamma_0^{-1}_h}{\partial n_h} (\Pi^* u_h)(\tilde{a}_i)$
$\tilde{a}_i \in \Gamma_h$
NQ = 200

Figure 8.2

Exemple 9

$$u_0(x,y,z) = \begin{cases} -y^2-z^2 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2x^2-y^2-z^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$G(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}/16} \qquad \begin{cases} 4x^2-2y^2-2z^2 & \text{si } x \leqslant 0 \\ -2y^2-2z^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

On résoud le problème avec ces données dans le cas NQ = 209 et NN = 192. La solution exacte est $u(x,y,z) = 2x^2 - y^2 - z^2$, et alors

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,y,z)\Big|_\Gamma = \frac{4x^2-2y^2-2z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}/16} .$$

Le tableau 9.1 compare $\pi^* u_h(a_i)$ et $u(a_i)$ aux noeuds a_i situés sur le parallèle où l'erreur relative $\left|\frac{u(a_i)-\pi^* u_h(a_i)}{u(a_i)}\right|$ atteint son maximum ; puisque $u|_\Gamma$ est une fonction paire de x et de y, on peut se limiter à la moitié de ce parallèle.

Dans le tableau 9.2, on fait la même chose, mais sur le "plus grand" parallèle (ou l'un des deux, si c'est le cas).

Enfin, la figure 9.1 indique l'allure de $\pi^* u_h$ dans ces deux cas.

Coordonnée de a_i selon l'axe $\vec{z}$	$\Pi^* U_h(a_i)$	$U(a_i)$	$\lvert U(a_i) - \Pi^* U_h(a_i) \rvert / \lvert U(a_i) \rvert$	$u_0(a_i)$
-0.7454	-0.6868	-0.6195	0.1087	-1.731
-0.6647	-1.009	-0.9612	0.05020	-1.845
-0.5119	-1.541	-1.501	0.02699	-2.025
-0.3039	-2.025	-2.020	0.00754	-2.194
-0.06241	-2.283	-2.275	0.00342	-2.283
0.1855	-2.183	-2.183	0.0	-2.183
0.4134	-1.774	-1.774	0.0	-1.174
0.5964	-1.219	-1.219	0.0	-1.219
0.7148	-0.7537	-0.7537	0.0	-0.7537
0.7557	-0.5731	-0.5731	0.0	-0.5731

Tableau 9.1

Coordonnée de a_i selon l'axe $\vec{z}$	$\Pi^* U_h(a_i)$	$U(a_i)$	$\lvert U(a_i) - \Pi^* U_h(a_i) \rvert / \lvert U(a_i) \rvert$	$u_0(a_i)$
-0.9763	1.804	1.799	0.00264	-0.1076
-0.8705	1.216	1.213	0.00300	-0.3030
-0.6704	0.2874	0.2875	0.00020	-0.6113
-0.3976	-0.5816	-0.5865	0.00834	-0.9027
-0.08174	-1.054	-1.041	0.01284	-1.054
0.2430	-0.8836	-0.8836	0.0	-0.8836
0.5414	-0.1815	-0.1815	0.0	-0.1815
0.7811	0.7696	0.7696	0.0	0.7696
0.9362	1.569	1.569	0.0	1.569

Tableau 9.2

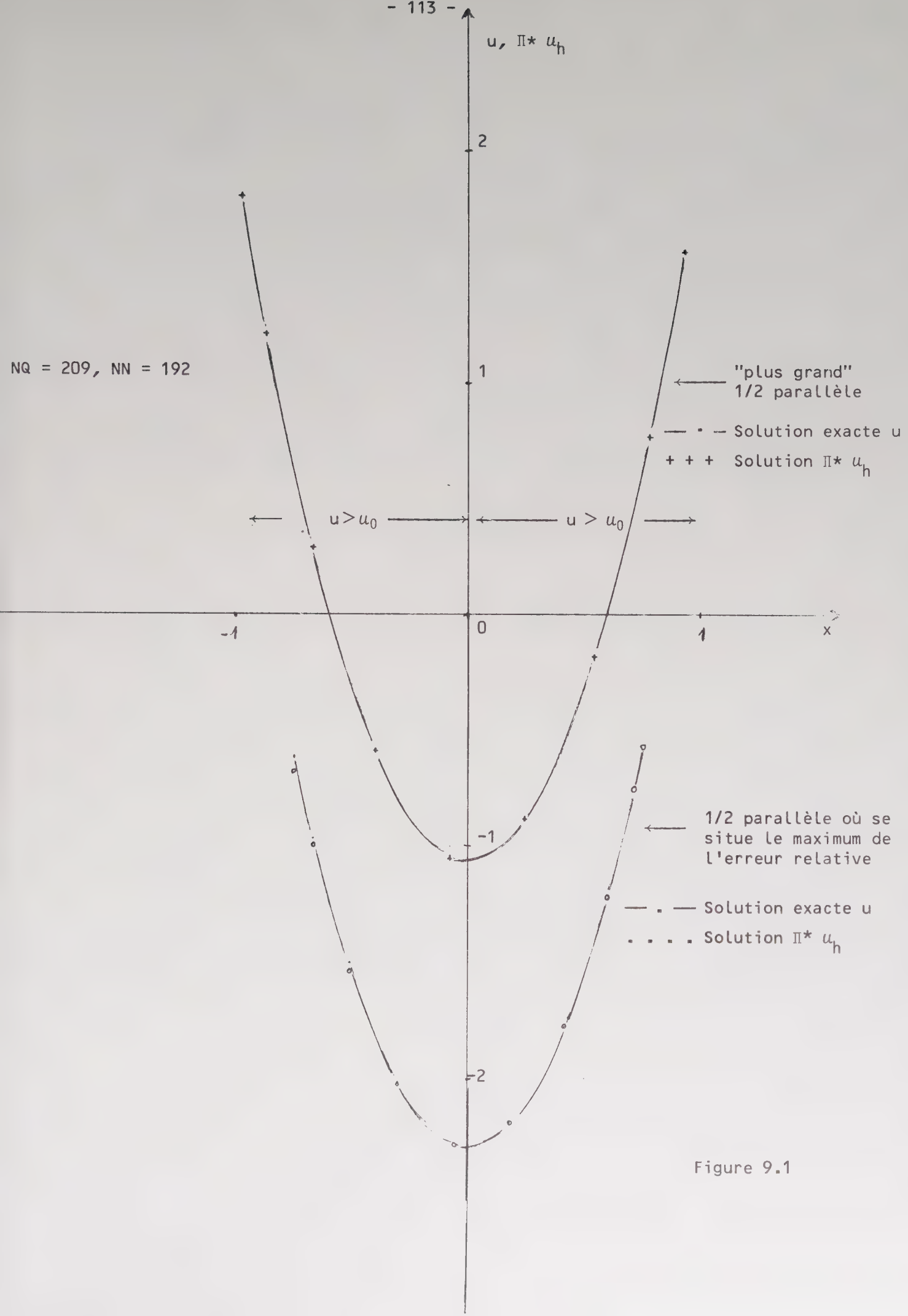

u, Π* u_h
2
1
-1
-2
0
1
x
NQ = 209, NN = 192
"plus grand" 1/2 parallèle
Solution exacte u
Solution Π* u_h
u > u_0
u > u_0
1/2 parallèle où se situe le maximum de l'erreur relative
Solution exacte u
Solution Π* u_h

Figure 9.1

Exemple 10

On fait exactement la même chose que dans l'Exemple 9, avec

$$u_0(x,y,z) = \begin{cases} x & \text{si } x \leqslant 0 \\ x-x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$G(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2/16}} \begin{cases} x-x^2 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Le problème a pour solution exacte $u(x,y,z) = x$, donc

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,y,z)\Big|_\Gamma = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2/16}} .$$

Les tableaux 10.1 et 10.2 ont les mêmes fonctions que 9.1 et 9.2 dans l'Exemple 9. Il en est de même pour la figure 10.1 par rapport à la figure 9.1.

Coordonnée de a_i selon l'axe $\vec{z}$	$\Pi^* U_h(a_i)$	$U(a_i)$	$\lvert U(a_i) - \Pi^* U_h(a_i) \rvert / \lvert U(a_i) \rvert$	$u_0(a_i)$
-0.5333	-0.5333	-0.5333	0.0	-0.5333
-0.4755	-0.4755	-0.4755	0.0	-0.4755
-0.3662	-0.3662	-0.3663	0.0	-0.3662
-0.2172	-0.2172	-0.2172	0.0	-0.2172
-0.04465	-0.04465	-0.04465	0.0	-0.4465
0.1327	0.1151	0.1327	0.13271	0.1151
0.2957	0.2771	0.2957	0.06300	0.2083
0.4266	0.4024	0.4266	0.05679	0.2446
0.5113	0.4840	0.5113	0.04950	0.2499
0.5406	0.5135	0.5406	0.05015	0.2483

Tableau 10.1

Coordonnée de a_i selon l'axe $\vec{z}$	$\Pi^* U_h(a_i)$	$U(a_i)$	$\lvert U(a_i) - \Pi^* U_h(a_i) \rvert / \lvert U(a_i) \rvert$	$u_0(a_i)$
-0.9763	-0.9763	-0.9763	0.0	-0.9763
-0.8705	-0.8705	-0.8705	0.0	-0.8705
-0.6704	-0.6704	-0.6704	0.0	-0.6704
-0.3976	-0.3976	-0.3976	0.0	-0.3976
-0.08174	-0.08174	-0.08174	0.0	-0.08174
0.2430	0.2281	0.2430	0.06115	0.1839
0.5414	0.5320	0.5414	0.01728	0.2483
0.7811	0.7585	0.7811	0.02895	0.1710
0.9362	0.9202	0.9362	0.01705	0.05974
0.9848	0.9626	0.9898	0.02751	0.01007

Tableau 10.2

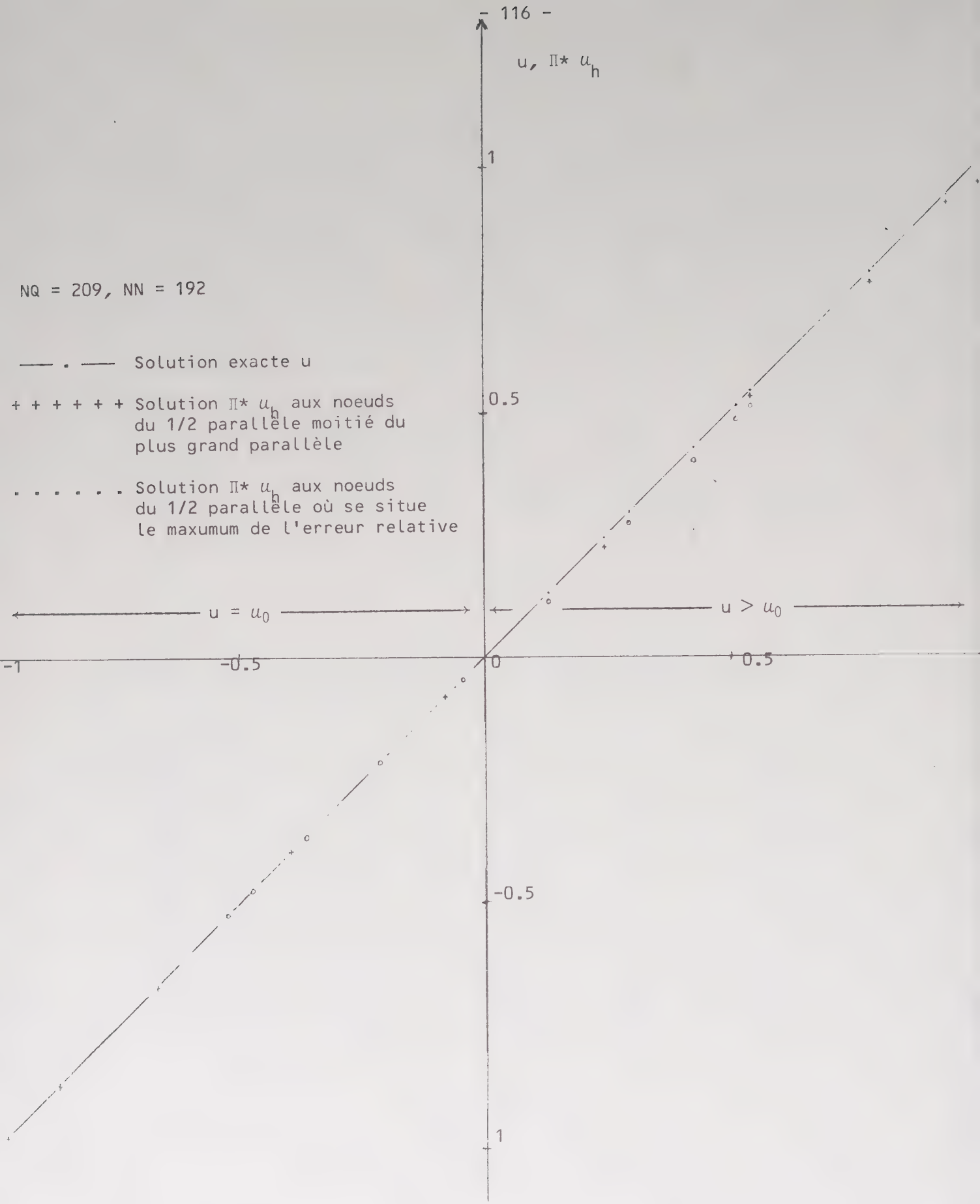

u, Π* u_h
1
0.5
-0.5
1
-1
-0.5
0
0.5
NQ = 209, NN = 192
—— . —— Solution exacte u
+ + + + + + Solution Π* u_h aux noeuds du 1/2 parallèle moitié du plus grand parallèle
. . . . . Solution Π* u_h aux noeuds du 1/2 parallèle où se situe le maxumum de l'erreur relative
u = u_0
u > u_0

Figure 10.1

CONCLUSION

Les résultats numériques obtenus montrent que la méthode fournit une très bonne approximation des valeurs de la solution sur le bord, et ceci avec un nombre peu élevés d'éléments. Par contre, la précision sur la dérivée normale est moins bonne.

Du point de vue théorique, nous avons établi la convergence de l'approximation sans pouvoir, toutefois, donner une estimation de l'ordre de l'erreur.

Du point de vue informatique, l'essentiel du temps de calcul et de la place mémoire est consacré à l'assemblage d'une matrice pleine $N \times N$ où N est le nombre de sommets de la triangulation de la surface Γ de $\mathbf{R}^3$.

L'application de cette méthode à notre problème nous parait nouvelle : elle a permis de résoudre un problème tridimensionnel difficile à aborder par les techniques classiques.

LISTE DES PRINCIPAUX SOUS-PROGRAMMES UTILISÉS

SUBROUTINE CHCOOR — détermine les coefficients de la restriction d'une fonction de base v_h^i , $1 \leqslant i \leqslant NN$ à un élément de Γ_h

CHRGQ — calcule les NQ charges des NN potentiels de simple couche $\pi^* v_h^i$, $1 \leqslant i \leqslant NN$

COEF — suivant leur nombre, choisit les noeuds et les poids d'intégration de Gauss dans un triangle

COMAT — calcul et assemblage des coefficients

$$a_{ij}^h = \int_{\Gamma_h} v_h^i(x) \frac{\partial \pi^* V_h^j}{\partial n_h}(x)\, d\Gamma_h(x)$$

de la matrice A_h

COMAT 1 — calcul de $\int_T \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{|X-P|}\right) d\xi\, d\eta$, $\int_T \frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{|X-P|}\right) d\xi\, d\eta$, $\int_T \frac{d\xi\, d\eta}{|X-P|^3}$, P étant un noeud d'intégration numérique

FUNCTION FX
FUNCTION FZ — paramétrisation de la courbe OXZ, trace de Γ

SUBROUTINE LEQT1P — sous-programme IMSL ; résoud simultanément NQ équations du type MX = B , M étant une matrice NN × NN symétrique, définie positive, stockée en mode symétrique (Cholesky)

LOC 1 — calcul de $V_h(P) = \int_T \frac{d\Gamma_h X}{|X-P|}$ potentiel créé en P par une charge unité sur le quadrilatère ou le triangle T , de même que le gradient de V_h en P

LOC 2 — calcul approché de $V_h(P)$ avec un développement limité d'ordre 2 quand P n'est pas trop proche du triangle ou du quadrilatère T avec une charge unité ($R = \frac{\text{distance de P au barycentre de T}}{\text{diamètre de T}} \geqslant 2{,}45$)

LOC 3 — calcul approché de $V_h(P)$ avec un développement limité d'ordre 1 quand P est assez loin de T avec une charge unité ($R > 4$)

SUBROUTINE MATBE — calcul de la partie linéaire de la fonctionnelle quadratique

MATF — calcul de la dérivée normale des fonctions de base $\pi^* v_h^i$, $1 \leqslant i \leqslant NN$ aux barycentres des éléments de Γ_h

MATQ1P — calcul et assemblage des coefficients $\tilde{a}{}^h_{ij} = \int_{\Gamma_h}\int_{\Gamma_h} \frac{d\Gamma_h(x)d\Gamma_h(y)}{|x-y|}$ de la matrice $\tilde{A}_h$

PLOC — effectue le choix entre LOC 1, LOC 2 et LOC 3 pour calculer $V_h(P)$

QDRIA — donne une triangulation de Γ_h avec un maximum de quadrilatères ; NQ = nombre d'éléments, NN = nombre de noeuds

RELAX — minimisation avec contrainte d'une fonctionnelle quadratique par la relaxation avec projection

SURF — calcul de la surface d'un triangle ou d'un quadrilatère

TRIAN — donne une triangulation de Γ_h avec uniquement des triangles

VEØ4A — sous-programme HARWELL ; minimisation avec contrainte d'une fonctionnelle quadratique avec la méthode de FLETCHER-POWELL

BIBLIOGRAPHIE

[1] ADAMS, R.A., *Sobolev spaces*, Academic Press, New York, 1976.

[2] BERGER, A., SCOTT, R., STRANG, G., *Approximate boundary conditions in the finite element methods*, Symposia Mathematica X, Academic Press, New York, 1972.

[3] BREZIS, H., *Problèmes unilatéraux*, J. Math. Pures et Appl., 51 (1972), 1-168.

[4] BREZIS, H., *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contraction dans les espaces de Hilbert*, North Holland, Amsterdam, 1973.

[5] BREZZI, F., HAGER, W.W., RAVIART, P.A., *Error estimates for the finite element solution of variational inequalities. Part 1 : Primal theory*, Numer. Math., 28 (1977), 431-443 ; *Part 2 : Mixed method*, Numer. Math., 31 (1978), 1-16.

[6] CEA, J., *Optimisation : théorie et algorithmes*, Dunod, Paris, 1970.

[7] CEA, J., GLOWINSKI, R., NEDELEC, J.C., *Application des méthodes d'optimisation, de différences et d'éléments finis à l'analyse numérique de la torsion élasto-plastique d'une barre cylindrique*, IRIA, cahier n° 12, 1974.

[8] CIARLET, P.G., *The finite element method for elliptic problems*, North Holland, Amsterdam, 1978.

[9] DJAOUA, M., *Méthode d'éléments finis pour la résolution d'un problème extérieur dans* $\mathbf{R}^3$, Rapport Interne du Centre de Mathématiques Appliquées de l'Ecole Polytechnique (91128 - Palaiseau), n° 3 (1976).

[10] DUVAUT, G., LIONS, J.L., *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, Paris, 1972.

[11] EKELAND, I., TEMAM, R., *Analyse convexe et problèmes variationnels*, Dunod-Gauthier Villars, Paris, 1974.

[12] FALK, R.S., *Approximate solutions of some variational inequalities with order of convergence estimates*, Ph.D. Thesis, Cornell University, 1971.

[13] FALK, R.S., *Error estimates for the approximation of a class of V.I.*, Math. Comp., 28 (1974), 963-971.

[14] FALK, R.S., *Approximation of an elliptic boundary value problem with unilateral constraints*, RAIRO, R2 (1975), 1-12.

[15] FICHERA, G., *Boundary value problems of elasticity with unilateral constraints*, Encyclopedia of Physics, S. Flügge (ed.), vol. VI, a/2, Springer Verlag, Berlin, 1972.

[16] FLETCHER, R., JACKSON, M.P., *Minimization of a quadratic function of many variables subject only to lower and upper bounds*, J. Inst. Math. Appl., 14 (1974), 159-174.

[17] GLOWINSKI, R., *Introduction to the approximation of elliptic variational inequalities*, Rapport n° 76/006, Laboratoire d'Analyse Numérique, Univ. de Paris VI, 1976.

[18] GLOWINSKI, R., LIONS, J.L., TREMOLIERES, R., *Analyse numérique des inéquations variationnelles*, vol. 1 et 2, Dunod, Paris, 1976.

[19] HESS, J.L., *Review of integral equation techniques for solving potential flow problems with emphasis on the surface source method*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 5 (1975), 145-196.

[20] HESS, J.L., SMITH, A.M.O., *Calculation of potential flow about arbitrary bodies*, Progress in Aeronautical Sciences, vol. 8, Pergamon Press, 1967.

[21] HLAVAČEK, I., *Dual finite element analysis for semi-coercive unilateral boundary value problems*, Applikace Matematiky, 23 (1978), 52-72.

[22] KINDERLHERER, D., STAMPACCHIA, G., *An introduction to variational inequalities and their applications*, Academic Press, New York, 1980.

[23] LIONS, J.L., *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris, 1969.

[24] LIONS, J.L., *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod, Paris, 1968.

[25] LIONS, J.L., MAGENES, E., *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, vol. 1, Dunod, Paris, 1968.

[26] LIONS, J.L., STAMPACCHIA, A.G., *variational inequalities*, Comm. Pure Appl. Math., 20 (1967), 493-519.

[27] MOSCO, U., *Error estimates for some variational inequations*, in "Mathematical Aspects of Finite Element Methods", Galligani, I. & Magenes, E. (eds.), Lecture Notes in Mathematics n° 606, Springer Verlag, Berlin, 1977, 224-236.

[28] NEČAS, J., *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris, 1967.

[29] NEDELEC, J.C., *Curved finite element methods for the solution of singular integral equations on surfaces in* $\mathbb{R}^3$, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 8 (1976), 61-80.

[30] NEDELEC, J.C., PLANCHARD, J., *Une méthode variationnelle d'éléments finis pour la résolution numérique d'un problème extérieur dans* $\mathbb{R}^3$, RAIRO, 7 (1973), 105-129.

[31] SCARPINI, F., VIVALDI, M.A., *Error estimates for the approximation of some unilateral problems*, RAIRO, 11 (1977), 197-200.

[32] SCHWARTZ, L., *Analyse hilbertienne*, Hermann, Paris, 1979.

[33] STRANG, G., FIX, A., *Analysis of finite element methods*, Prentice Hall, New York, 1973.

[34] TREMOLIERES, R., *Inéquations variationnelles : existence, approximation, résolution*, Thèse, Paris, 1972.

[35] YOSIDA, K., *Functional analysis*, Springer Verlag, Berlin, 1974.